ALGUNAS DIFERENCIAS ENTRE REALES Y RACIONALES: UN APORTE A LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO REAL EN LA ESCOLARIDAD

JOHNNY ALBERTO RICO GUEVARA

CÓDIGO 9217434

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI, FEBRERO DE 2012

ALGUNAS DIFERENCIAS ENTRE REALES Y RACIONALES: UN APORTE A LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO REAL EN LA ESCOLARIDAD

JOHNNY ALBERTO RICO GUEVARA

CÓDIGO 9217434

DIRECTORA DE TRABAJO DE GRADO:

MG. LIGIA AMPARO TORRES

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI, FEBRERO DE 2012

AGRADECIMIENTOS

A la profesora Maribel Patricia Anacona por su apoyo en todo este recorrido final de mi carrera.

A la profesora Ligia Amparo Torres por su disposición para dirigir este trabajo de grado

Un agradecimiento muy especial a las profesoras evaluadoras Luz Victoria de La Pava y Linda Erika López, puesto que sus acertadas observaciones fueron clave en la culminación de este trabajo.

Y, por supuesto, a mi familia, en especial a mi madre por motivar este logro.

RESUMEN

La fundamentación aritmética de los números reales es soporte de importantes desarrollos en el campo de las matemáticas. Este proceso de fundamentación tardaría más de dos mil quinientos años durante los cuales se exhibirían características esenciales de los números reales. El siguiente estudio histórico epistemológico es una propuesta para acercarse a la caracterización de dicho conjunto mostrando diferencias conceptuales y estructurales entre el conjunto de los reales y el conjunto de los números racionales.

El estudio incluye, además de un breve recorrido por la historia de las matemáticas en lo que se refiere a la fundamentación aritmética de los números reales, un análisis de algunas representaciones del conjunto de los racionales y del conjunto de los reales que contribuyen al propósito de mostrar diferencias entre ambos conjuntos. Finalmente, el análisis de dos textos escolares permitirá visualizar la manera como se exhiben los conjuntos numéricos y cuánto de las características esenciales de ambos conjuntos sirven como apoyo a la apropiación del concepto numérico, en particular, del concepto de número real.

INTRODUCCIÓN

La constitución de los números reales (***R***) en objeto matemático[1] se convirtió en un asunto de importancia fundamental para el desarrollo de las matemáticas, desde la geometría de los griegos hasta hoy. Este extenso proceso de objetivación de los reales no interviene en la etapa escolar, pues al observar los contenidos de los textos escolares de matemáticas, tal como lo hemos constatado en nuestra experiencia docente, vemos que no se incluye en ellos lecciones que permitan acercarse a un análisis para la apropiación adecuada del campo numérico desde su naturaleza totalmente abstracta; y en la enseñanza de los reales en el ámbito universitario sucede algo similar, convirtiéndose esto en una de las causas de la insuficiente comprensión del campo numérico, reflejado en las falencias presentadas por muchos estudiantes tal como hemos comprobado en la práctica docente desde la experiencia personal en las aulas de varios colegios y en las asesorías personalizadas a estudiantes de primeros semestres de las principales universidades de la localidad. Por ejemplo, durante algunas clases de secundaria, se han dado situaciones en que algunos estudiantes se cuestionan por el origen de los números, la naturaleza de los números irracionales, y que, de acuerdo con Romero, I. (1995)[2], confunden su representación simbólica con una operación como la raíz cuadrada o que simplemente los entienden como números decimales infinitos no periódicos y con gran dificultad de ser representados en la recta numérica. De la misma manera, en el ámbito universitario es usual encontrar estudiantes que no reconocen con claridad las diferencias conceptuales y estructurales entre uno y otro conjunto; en algunos casos se limitan a citar diferencias relacionadas con su representación decimal o realizar una asociación arbitraria con conceptos como el de densidad, infinito o cardinalidad, sin

---

[1] Una entidad matemática se constituye en objeto matemático, desde lo epistemológico, al estructurarse de manera lógico – formal o sintáctica.
[2] Isabel Romero Albaladejo, docente Universidad de Almería, Didáctica de las matemáticas.

poder caracterizar de manera precisa los conceptos presentes en los racionales y los reales, que permiten indicar las diferencias entre ambos conjuntos numéricos.

Ahora bien, al tratarse de la representación de los números reales, también hallamos dificultades. Es evidente que la representación de un número real, ya sea mediante un símbolo especial[3] o posicional, no arroja claridad sobre el concepto de este, aunque para esto se disponga de una estructura formal, y según Romero, I. (1995; p 62,63), las representaciones no permiten exhibir todas las características de un objeto matemático, en este caso ***R***. De aquí se desprende el hecho de que, para los objetivos propuestos en este trabajo, deben tenerse en cuenta las diferentes representaciones de los números, no solo con el propósito de diferenciarlos, sino porque, de acuerdo con Gardiner (1982), las representaciones, en particular, la representación en la recta numérica, sostienen el concepto global de número en los estudiantes.

Dadas las dificultades que hemos mencionado y guiados por el objetivo de diferenciar los reales de los racionales, realizaremos un análisis de estos dos conjuntos numéricos en el capítulo 2 de este trabajo, centrando la atención en su representación en la recta. En este mismo capítulo, daremos una mirada a las denominadas ‘matemáticas olvidadas’, término con el cual se hace referencia a la Teoría de Fracciones Continuas. Esta teoría de las fracciones continuas inicia alrededor del siglo XVII, alcanzando su edad de oro en el siglo XVIII, la cual fue liderada por tres matemáticos, Euler, Lambert y LaGrange. Una revisión de los aspectos más básicos del tema de fracciones continuas se constituye en una manera de acercarse a los reales desde una perspectiva diferente, que indaga una forma de representación de

[3] El término *especial* se refiere a representaciones de los números mediante símbolos que no son cifras, por ejemplo, los utilizados para el número áureo ($\boldsymbol{\phi}$) y pi ($\boldsymbol{\pi}$). También tomamos como representaciones *especiales* la operación de radicación aplicada a un número que resulta en irracional como $\sqrt{\mathbf{2}}$ o las funciones numéricas de una variable real, tales como la función logaritmo o las trigonométricas, por ejemplo $\cos \pi/\mathbf{3}$, $\ln \mathbf{2}$ Estas representaciones toman la expresión completa como un número.

R poco utilizada y que consideramos contribuirá a los objetivos buscados por este trabajo.

Por otra parte, cabe preguntarse, ¿por qué es tan importante la apropiación de este conjunto numérico, no solo para los futuros matemáticos o licenciados, sino también para la formación de otros científicos e ingenieros?

A este respecto, se podría mencionar que en ciencias experimentales, se suelen utilizar los conocimientos en matemáticas para construir modelos de determinados fenómenos de estudio que en un experimento real muchas veces sería imposible de estudiar. En estos análisis se distinguen modelaciones de carácter discreto o continuo que requieren representarse mediante funciones definidas, en el conjunto de los números enteros o en el conjunto de los números reales, respectivamente. Podemos tomar como ejemplo en este ámbito las magnitudes en el campo de la física, las cuales se definen teóricamente tomando valores reales, aunque en la práctica la mayor aproximación con que se traten estas corresponda a números racionales.

Podemos ver entonces una aplicación de la modelación numérica en la realidad circundante, la cual requiere no solo de los números naturales, sino que debe extenderse hacia los restantes conjuntos numéricos[4].

Pese al hecho de que se requiere, no solo el uso, sino la comprensión de las características fundamentales del conjunto de los números reales, la presentación que se realiza de estos en la educación media vocacional suele ser de carácter conjuntista (***R*** como la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales; donde los irracionales se presentan como el complemento de los racionales). Además, se presentan los irracionales

[4] Algunos autores, como Luis Rico, realizan estudios de los números naturales y argumentan razones para extenderse hacia otros campos numéricos (Rico, 1995).

como números racionales con cifras decimales infinitas que no tienen período o, geométricamente, por ejemplo, se presenta $\sqrt{2}$ como la diagonal de un cuadrado de lado 1, lo cual no permite una apropiada caracterización de este conjunto numérico. Es común encontrar en los cursos de Cálculo y Análisis, una presentación axiomática de los reales (Apostol, 1982), la cual aunque es una alternativa válida no puede ser la única manera de conocer este conjunto, porque ella no permite ver toda la riqueza conceptual que tiene este conjunto numérico y sus distintas propiedades. Esto genera obstáculos epistemológicos en la comprensión de los números reales.

Se considera, por tanto, que la apropiación del concepto de ***R*** es fundamental en la formación de docentes y otros profesionales. En este propósito es fundamental tomar en cuenta los procesos de validación de los números reales, para lo cual se hace necesario indagar en construcciones de estos, las cuales nos permiten conocer las propiedades y la naturaleza de este conjunto.

Así que, consideramos de suma importancia elaborar un documento mediante un estudio histórico en el cual se expliciten las diferencias estructurales entre ambos conjuntos mediante un análisis de una de las construcciones de los números reales y algunos problemas relacionados con las representaciones de ***R***, pues como ya se mencionó, las representaciones conllevan dificultades, y aunque dichas representaciones que se realicen de los números reales, como, por ejemplo, la de la recta numérica introducida por Cantor y Dedekind, se muestren esencialmente correctas, estas pasan por alto problemas epistemológicos, educativos e incluso matemáticos, lo cual debe ser analizado y tomado en cuenta por tratarse de una cuestión que, incluso en la actualidad, es objeto de discusión dentro de la matemática.

Este trabajo pretende brindar un texto escrito en un lenguaje formal apropiado pero con términos sencillos, que permita una lectura fluida, con la posibilidad de ser comprendido por estudiantes de primeros semestres de universidad e incluso por algunos estudiantes de secundaria, donde se logre ver de manera clara el proceso de constitución de los números reales en objeto matemático, su caracterización y sus representaciones, para así dar cuenta de las diferencias entre este conjunto y el de los números racionales, con el fin de contribuir a una mejor apropiación del concepto de número, en especial el de número real.

Se debe reconocer, entonces, lo valioso de realizar un análisis del surgimiento de ***R*** como herramienta conceptual para suplir necesidades imposibles de satisfacer en el conjunto de los racionales, por ejemplo, la insuficiencia de los números racionales para medir cualquier segmento, o más precisamente para comparar cualquier par de segmentos dados; y otras lagunas de tipo algebraico, como la imposibilidad de resolver ecuaciones tales como $x^2 = 2$. Es decir, los alcances y limitaciones que tiene ***Q*** para realizar tareas fundamentales del álgebra y el análisis.

Una tarea fundamental es asignar una cantidad numérica a una magnitud, y esto es actualmente algo que se suele realizar de manera natural, por ejemplo, basta con realizar algún procedimiento pertinente para determinar la medida de alguna longitud, área o volumen. En este procedimiento se trata de asignar un número real positivo a dicha magnitud, lo cual actualmente se realiza, generalmente, de manera muy elemental. Pero el proceso para llegar a tal resultado se ha desarrollado a través de miles de años por medio de un arduo trabajo.

Por todo lo anterior, hemos escogido como propósito para este trabajo, realizar un análisis sobre las diferencias entre ambos conjuntos, que contribuya a una mejor comprensión del conjunto de los reales y aporte elementos de orden pedagógico, ofreciendo, a su vez, herramientas conceptuales y procedimentales que los docentes puedan emplear en la enseñanza del concepto.

Iniciamos el Capítulo 1, haciendo un recorrido por la historia de la matemática que nos permita visualizar algunos de los acontecimientos que han llevado a la caracterización de los reales y la importancia de su constitución como objeto matemático. En este capítulo 1 se realizará un análisis de la construcción de los números reales de Dedekind. Hemos escogido su construcción por el uso que hace el autor de la intuición geométrica, la teoría de conjuntos y por tratarse de una construcción de carácter más intuitivo que la de Cantor.

Seguidamente trataremos en el capítulo 2 algunas representaciones de los racionales y los reales mostrando cómo estas nos permiten diferenciar dichos conjuntos numéricos, y finalizamos en el capítulo 3 mostrando la presentación de los números reales y de los racionales que realizan algunos textos escolares utilizados en la actualidad en el ámbito escolar nacional con el propósito de analizar los contenidos relacionados con estos conjuntos numéricos a la luz de lo consignado en nuestro estudio.

CAPÍTULO 1: BREVE HISTORIA DE LOS NÚMEROS REALES

"*Los números son la libre creación de la mente humana*"[5].
R. Dedekind.

Es en Grecia, entre el siglo VI y el III a.EC[6], donde las matemáticas se empiezan a conformar como una disciplina de carácter científico. Particularmente, los *Elementos* de Euclides constituyen el primer ejercicio de formalización de los conocimientos matemáticos de la época.

Se sabe que antes de los griegos existían trabajos importantes en matemáticas de parte los babilonios, egipcios, indios, chinos; incluso en América los aztecas desarrollaron métodos que les permitieron, por ejemplo, calcular con exactitud áreas de superficies. Pero estas matemáticas se relacionaban directamente con el comercio, la agricultura, astronomía, arquitectura, etc. En general, se trataba de unas matemáticas dedicadas a la solución de problemas prácticos.

Los antiguos griegos inician la construcción de una matemática teórica interesada en los conceptos mismos, más allá de resolver problemas del contexto material de la época. Por esta razón, los griegos se preocupan por cimentar las matemáticas en la necesidad de demostrar. Por tanto, es pertinente iniciar el estudio de los números y su constitución como objeto matemático realizando un recorrido por los desarrollos de los griegos. Este es el punto de partida para mostrar las diferencias conceptuales y estructurales entre los números reales y los racionales, y los

[5] A diferencia de Kronecker (1823-1891), matemático alemán quien con su famosa frase "*Dios hizo los naturales; el resto es obra del hombre*" afirma que los números naturales anteceden al hombre, Dedekind considera que los números en general son producto de la mente sin otras consideraciones en cuanto a su origen. A cerca de esta consideración se realizará un breve análisis más adelante en este capítulo.
[6] a.EC (antes de la era común o era actual), utilizaremos estas siglas para referirnos a lo que comúnmente se denomina antes de Cristo (a.C.) por ser considerada una designación neutral sin matices religiosos.

acontecimientos que han llevado a la constitución de ambos conjuntos numéricos.

1.1. El concepto de número en los griegos.

Tales y Pitágoras inician el derrotero de una teorización de las matemáticas griegas alrededor del siglo VI a.EC. (Recalde, 2006; p 2). Es en la escuela pitagórica donde inicia la teoría abstracta de los números, se acuña entonces la frase "todo es número", pues los pitagóricos afirmaban que a toda cosa correspondía un número, una idea con un sentido muy profundo, al punto de considerarse sagrado. Esta idea se puede constatar en la compilación de las teorías matemáticas acumuladas por los antiguos griegos, realizada unos doscientos años después de Tales y Pitágoras, se trata de los *Elementos* de Euclides, un texto constituido por trece volúmenes.[7] En esta importante obra podemos conocer la concepción pitagórica de número. En el libro VII encontramos las siguientes definiciones:

> Definición 1. Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de |las cosas que hay, se llama *una.*
>
> Definición 2**.** Un número es una pluralidad compuesta de unidades.
> (Los *Elementos* de Euclides. Recuperado el 9 de septiembre de 2011 de http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm)

La definición 1 muestra que la esencia universal es la unidad o 'monada', siendo ésta el ente que constituye el número tal como lo indica la definición 2.

Para Aristóteles la unidad no es número, el número es medido por la unidad, la cual es el principio de cada género, es indivisible y es esencialmente diferente al ser que genera, lo medido no es de la misma naturaleza de la

[7] El tratado de geometría titulado *Elementos* se cree que fue escrito alrededor del año 300 a.EC. Pese a su antigüedad, su interés no es sólo histórico, pues sigue siendo un referente para la enseñanza de la geometría.

unidad que lo mide, la unidad nos permite conocer el número, todo número se forma de la unidad. Esto muestra la manera como los griegos definían número: una pluralidad de unidades. Por tanto, la unidad no es número pues no es una pluralidad.

> ...la unidad es el principio de lo cognoscible en cada género. Ahora bien, la unidad no es la misma en el caso de todos los géneros: en un caso es el intervalo más pequeño, en otro caso la vocal o la consonante, otra es la unidad del peso y otra la del movimiento. En todos los casos, a su vez, la unidad es lo indivisible en cantidad o en especie. (Aristóteles: Metafísica, Gredos, 63. Tomado de: Recalde, 2006, p 16)

El cero tampoco se consideraba como número pues además de no ser una pluralidad de unidades, desde el punto de vista filosófico, considerarlo número implicaría el *no ser* lo cual sería una contradicción a la máxima griega '*todo es* número'.

Esta visión de número en los griegos, específicamente la visión pitagórica de número, nos conduce por el camino que deseamos seguir en este documento. Dada la definición de número, Euclides nos muestra en los *Elementos*, la unidad representada por un segmento (una raya) que puede ser vertical u horizontal, diferenciándola del segmento que representa una magnitud lineal, el cual es divisible, mientras que el segmento que representa la unidad numérica es indivisible, estas características implicarían una absoluta conmensurabilidad de los segmentos o magnitudes lineales, es decir, la existencia de una medida común para dos segmentos distintos, pues cualquier par de segmentos o magnitudes lineales, se podrían dividir cuantas veces fuera necesario hasta hallar una medida común para ambos. Esta implicación que aseguraba la conmensurabilidad se convertiría en la mayor controversia experimentada en la escuela pitagórica, lo cual es de gran importancia como aporte histórico y conceptual para caracterizar los números racionales y los números reales.

1.2. Teoría de magnitudes de Euclides

Actualmente podemos asignarle a cada magnitud una medida, es decir, a cada segmento, área, volumen, etc., podemos asignarle un número real sin que esto implique algún inconveniente, pero no siempre ha sido así de sencillo. Un análisis de la teoría de magnitudes de Euclides nos muestra que, lo que hoy día no representa ningún inconveniente a la hora de medir algo, significó un problema en la antigüedad griega el cual dio origen a un largo proceso que llega a su culminación con los trabajos de Dedekind y Cantor. Este proceso corresponde al desarrollo histórico del concepto de número. Por lo cual es importante dar una mirada en este apartado a la teoría de magnitudes.

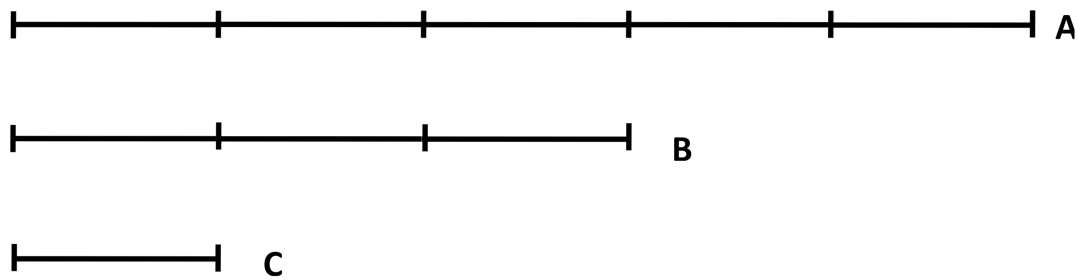
1.2.1. Conmensurabilidad

Según lo que acabamos de exponer, el concepto de unidad en la antigüedad griega aseguraba la conmensurabilidad de todo par de segmentos, es decir que siempre se podía medir un segmento con otro. Los pitagóricos estaban convencidos de la conmensurabilidad, esto, en su momento, implicaba que a cada segmento correspondía un número, mostrando de esta manera la estrecha relación entre el número y la magnitud. Pero el universo numérico para los pitagóricos consistía en lo que conocemos como los números naturales, excepto el uno y el cero tal como ya se explicó. Por lo tanto los pitagóricos aseguraban que toda magnitud se podía medir utilizando estos números siendo esta una teoría de magnitudes muy sólida en su planteamiento y estructuración. Se trata, según Recalde (2006; p 16), de la primera teoría de la medida documentada en los *Elementos*, la cual planteaba que para cada par de magnitudes de la misma naturaleza la una era cierto número de veces (o copias) la otra, es decir, dadas dos magnitudes $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, existen dos números (naturales) $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ tales que,

$$\boldsymbol{mA = nB} \text{ (Terminología moderna)}$$

Veamos qué significa esto en el caso de segmentos o magnitudes lineales.

Dados tres segmentos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ [8]



Al comparar $\boldsymbol{C}$ con $\boldsymbol{A}$ y con $\boldsymbol{B}$ podemos observar que 5 veces $\boldsymbol{C}$ es igual a $\boldsymbol{A}$ y 3 veces $\boldsymbol{C}$ es igual a $\boldsymbol{B}$, esto significa que $\boldsymbol{C}$ es una medida común para $\boldsymbol{A}$ y para $\boldsymbol{B}$, lo cual se puede expresar así,

$$\boldsymbol{5C = A} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{3C = B}$$

entonces,

$$\boldsymbol{3A = 5B}$$

en términos pitagóricos, tres agrupaciones de $\boldsymbol{A}$ corresponde a cinco agrupaciones de $\boldsymbol{B}$. En general, dos magnitudes cualesquiera $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son conmensurables si existen dos números $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ tales que,

$$\boldsymbol{mA = nB}$$

lo cual es equivalente a

$$\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{n}{m}}$$

Este resultado, escrito en terminología moderna, prefiguró los números racionales, pues por todo lo relacionado con el concepto de número para los

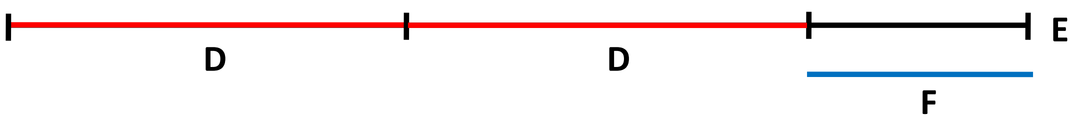
[8] A manera de convención simbólica utilizaremos letras mayúsculas para los segmentos lineales y letras minúsculas para las cantidades numéricas.

griegos, es claro que $\frac{n}{m}$ y $\frac{A}{B}$ no eran números, sino razones entre magnitudes.

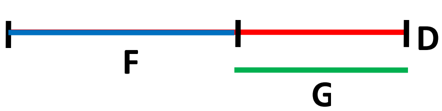
Como podemos ver mediante el anterior ejemplo, los pitagóricos comparaban dos magnitudes lineales o segmentos hallando otro que los midiera a ambos, lo cual es equivalente a hallar cuántas veces cabe el uno en el otro. Este proceso constaba siempre de un número finito de pasos. Veamos un ejemplo que nos muestra esto de otra manera.

Dados los segmentos D y E, hallar la medida de E con respecto a D

Observe que el segmento D cabe dos veces en E y sobra una medida equivalente al segmento F



Ahora se toma el segmento F y se mide D respecto a F



F cabe una vez en D y sobra la medida equivalente al segmento G. Seguidamente se determina cuántas veces cabe G en F, este cabe una vez y sobra la medida equivalente al segmento H

Y, finalmente, el segmento H cabe exactamente tres veces en el segmento G

De esta manera podemos concluir que como,

$$G = 3H$$

$$F = G + H$$

$$D = F + G$$

$$E = 2D + F$$

Entonces,

$$E = 18H \text{ y } D = 7H$$

Por tanto,

$$7E = 18D$$

Es decir,

$$E = \frac{18}{7}D$$

Este proceso podría ser más largo tratándose de otro par de magnitudes, pero según la concepción pitagórica, independiente de cuántos pasos tardara, este proceso siempre sería finito, implicando que las magnitudes serían medibles entre sí.

Lo anterior no quiere decir que los pitagóricos negaran el infinito. Respecto al infinito, para los antiguos griegos como Pitágoras y Aristóteles, este existe solo en potencia, es decir, el infinito se construye en el sentido de que a una cantidad siempre es posible añadirle otra y continuar con este proceso de manera indefinida. El infinito en un acto (infinito actual), como un todo existente, no se concebía.

Desde esta perspectiva, y siendo coherente con las concepciones establecidas respecto a la unidad numérica y a la unidad lineal (segmento), Aristóteles plantea dos tipos de infinito, el primero consiste en un infinito que se puede obtener por conteo, sin que esto implique que el conjunto de números sea infinito. Se trata de que a una cantidad numérica siempre sea posible añadirle otra para obtener una mayor a la dada y este proceso lleva al infinito, el infinito por adición. El otro tipo de infinito resulta de dividir una magnitud lineal de manera indefinida, este proceso era admitido puesto que los segmentos son divisibles.

De todo lo anterior podemos concluir de manera clara y consistente que la teoría de la magnitudes indica que para medir son suficientes los números naturales (números de contar). Como ya mostramos, dos magnitudes cualesquiera $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son conmensurables si existen dos números $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ tales que $\boldsymbol{mA}=\boldsymbol{nB}$, lo cual es equivalente en notación actual a $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$, pero hay que recordar que para los pitagóricos la expresión $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$ no era un número y mucho menos $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$. Los racionales solo fueron prefigurados por ellos. Para los pitagóricos tenía sentido hablar del *logos*, todo se podía llevar al *logos*, entendido este como una razón entre números naturales o enteros positivos, pero la constitución actual de número racional se debe a un proceso de varios siglos.

Pero la teoría de magnitudes de Euclides presentó sus limitaciones. Durante el proceso de establecer esta teoría, los griegos se encontraron con un obstáculo que cambiaría de manera drástica su concepción del número y la magnitud, se trata del 'descubrimiento'[9] de magnitudes inconmensurables. La seguridad en que los números naturales podían medirlo todo se derrumbó por completo. Esto fue una catástrofe total para una escuela donde imperaba el dogma filosófico "los números son la esencia del universo".

Veamos cómo se llegó a esto, su importante repercusión en la etapa inicial de la fundamentación de la matemática y cómo contribuirá este análisis con el propósito de conocer los números reales y su diferencia con los racionales.

1.2.2. Inconmensurabilidad

La conmensurabilidad universal era una absoluta certeza en la antigüedad griega, pero la aparición de las magnitudes inconmensurables en los trabajos pitagóricos llevó a un gran problema para esta escuela. Este problema de la aparición de magnitudes que no se podían medir una con la otra condujo las matemáticas por el rumbo de una fundamentación que se extendió por más de veinticinco siglos y que finalmente condujo a la creación del conjunto de los números reales ***R***.

Como ya se dijo, el descubrimiento de magnitudes inconmensurables provocó una crisis en la escuela pitagórica, a tal grado que algunos historiadores la han catalogado de apocalíptica. Una referencia a esto la

---

[9] Se conocen resultados en las culturas babilonia y egipcia anteriores a los pitagóricos acerca de cantidades no racionales. La tablilla conocida como Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, escrita hacia el año 1800 a. EC en la que aparecen cuatro columnas de números distribuidos en 15 filas. En apariencia podía tratarse de algún tipo de anotación contable pero descifrados los números corresponden a la primera relación de las llamadas ternas pitagóricas de la que se tenga conocimiento.

hallamos en lo que se puede considerar como una nota aclaratoria realizada quizá por Proclo[10] acerca del libro X de *Los Elementos:*

> Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales (alogos), perecería en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas. (Jámblico, 246–247, Vida Pitagórica. 14, 141. Citado en: González, P. Biografía matemáticos: Pitágoras. El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Recuperado el 9 de septiembre de 2011 de http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/ Pitagoas14.asp.tm).

Otra referencia similar es la realizada por Jámblico[11]:

> Se dice que el primero que reveló la naturaleza de la conmensurabilidad (logos) e inconmensurabilidad (alogos), los indignos de participar de tales conocimientos, fue aborrecido [por la comunidad pitagórica] hasta el punto de que no sólo lo expulsaron de la vida y de la vivienda en común, sino que incluso le erigieron una tumba como si él, que había sido una vez compañero, hubiese abandonado la vida entre los hombres. [...] Otros afirman que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego al haber revelado la doctrina de los números irracionales y la inconmensurabilidad (Jámblico, 246–247, Vida Pitagórica. 14, 141. González, P. Biografía matemáticos: Pitágoras. El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Recuperado el 9 de septiembre de 2011 de http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Pitagoras14.asp.htm).

Tal descubrimiento debe cobrar gran importancia o ser valorado hoy en día; una razón para esto es que por tratarse de un suceso que implicó un cambio tan radical, pues se vino abajo un supuesto sobre el cual estaba sustentado el modo de llegar a conocer las matemáticas (epistemología) y la misma naturaleza numérica (ontología) de ese entonces, debería incidir en nuestro modo de aprender y enseñar las matemáticas, teniendo en cuenta que cuando se llega a un conocimiento profundo de algún objeto matemático se

[10] Filósofo neoplatónico del siglo V EC. representante de la escuela de Atenas
[11] Filósofo sirio del siglo III EC.

pueden superar obstáculos epistemológicos. Actualmente se evidencian obstáculos de esta índole al tratar de apropiarse del concepto de número real y entender sus diferencias conceptuales y estructurales con los números racionales.

Debido quizá al hermetismo de la escuela pitagórica no se conocen documentos escritos, lo que se conoce de ellos es debido a la tradición oral que algunos autores recogieron y documentaron. Por tanto, no podemos precisar cómo descubrieron la inconmensurabilidad los pitagóricos. Algunos historiadores mencionan que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, además de ser arrollador para esta escuela, fue descubierto en su mismísimo símbolo, la estrella que se forma con las diagonales del pentágono regular. Otros documentan que sucedió al aplicar el teorema de Pitágoras, que hasta el siglo XIX se le atribuía como descubridor al mismo Pitágoras[12], al cuadrado y su diagonal.

La inconmensurabilidad se puede definir como sigue:

Dadas dos magnitudes cualesquiera $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, son inconmensurables si no existen dos números $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ que satisfagan $\boldsymbol{mA = nB}$, o lo que es equivalente, dos magnitudes $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son inconmensurables si para cualquier números $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{mA \neq nB}$.

Se atribuye el hecho del descubrimiento de la inconmensurabilidad al pitagórico Hippasus de Metapontum, de quien se dice que fue arrojado al

[12] Un examen arqueológico realizado en el pasado siglo de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, pertenecientes a las civilizaciones que se desarrollaron entre los ríos Tigris y Éufrates en el segundo milenio a.E.C., ha revelado que los antiguos babilonios conocían aspectos del Teorema, más de mil años antes que el propio Pitágoras. Algo similar se puede afirmar respecto de las culturas que aparecieron a lo largo del río Nilo, así como de la antigua civilización hindú y de las antiguas civilizaciones chinas que surgieron en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo. Pero parece ser que no lo conocían ni las grandes civilizaciones precolombinas de América ni tampoco las del continente africano, exceptuando la egipcia. (El teorema de Pitágoras en las matemáticas babilónicas, recuperado el 26 de agosto de 2011 de http://www.astroseti.org/articulo/3626/.)

mar por admitir un hecho que negaba la filosofía pitagórica sobre la absoluta conmensurabilidad. Al parecer la primera demostración matemática consiste en la prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado y su lado, la cual se realizó por reducción al absurdo.

Se dice que esta prueba llegó a nosotros por la obra de Aristóteles los *Primeros Analíticos*[13], éste afirma:

> Todo el que lleva a cabo una argumentación por reducción al absurdo infiere silogísticamente una falsedad, y prueba hipotéticamente la conclusión original al resultar su contradictoria algo imposible de suponer; por ejemplo, que la diagonal es inconmensurable con el lado del cuadrado, porque si se supone su conmensurabilidad se deriva que números pares e impares son iguales. Al inferirse silogísticamente la igualdad de pares e impares, se prueba hipotéticamente la inconmensurabilidad de la diagonal, ya que de contradecirse esto resulta una falsedad. (Jiménez, 2006, p 87)

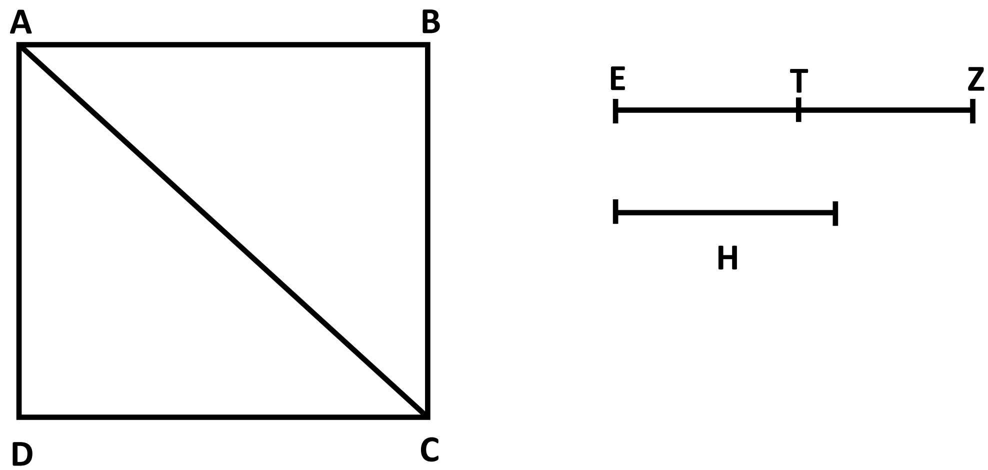
Esta demostración de la inconmensurabilidad se realizó por reducción al absurdo. No se puede saber con precisión cómo se expresó esta demostración, pero existe una proposición en los *Elementos* de Euclides que concuerda con los comentarios aristotélicos anteriores, es la proposición X.117, que según los eruditos en Euclides, se trata de un texto añadido, con fines didácticos, por los copistas que transcribían el legado euclidiano a las futuras generaciones. Veamos esta demostración[14].

Proposición X.117. Demostrar que en las figuras cuadradas la diagonal es inconmensurable en longitud con el lado. (Jiménez, 2006, p 87)

---

[13] Texto relevante para la lógica puesto que en este presenta Aristóteles su teoría del silogismo.

[14] Por tratarse de una interpolación, esta demostración no aparece en muchas traducciones de Euclides. Lo que se leerá a continuación es una traducción al español realizada por Jiménez (2006) de una traducción al inglés de una versión griega, la cual le hizo llegar un profesor de Penn State University.



Demostración.

Sea $ABCD$ un cuadrado, con diagonal AC. Supóngase que AC y AB son conmensurables, entonces llegaremos a que el mismo número será par e impar a la vez, lo cual obviamente es una contradicción.

Por el teorema de Pitágoras, es claro que el cuadrado en AC es dos veces aquel en AB. Como AC y AB son conmensurables, existe una proporción. Digamos que AC es a AB como EZ es a H, y supongamos que EZ y H son los más pequeños de aquellos que tienen la misma razón (como una fracción irreducible).

Entonces EZ no es la unidad, puesto que, como, EZ es a H como AC es a AB y AC es mayor que AB, entonces EZ es mayor que H, lo que implica que la unidad es mayor que un número y esto es absurdo. Así que, EZ no es la unidad y, por lo tanto, es un número.

Puesto que AC es a AB como EZ es a H, entonces también el cuadrado en AC es al cuadrado en AB como el cuadrado en EZ es al cuadrado en

H. Pero el cuadrado en AC es dos veces el cuadrado en AB, así el cuadrado en EZ es dos veces el cuadrado en H. Por lo tanto, el cuadrado en EZ es par (Def. VII.6: Un número par es el que se divide en dos partes iguales). En consecuencia, EZ es también par; porque si fuera impar, su cuadrado también sería impar, puesto que cuando se combina un número impar de sumandos impares, el total es impar[15]. Así, EZ es par. Divídase EZ en dos partes iguales en T, tal como se muestra en la figura arriba. Puesto que EZ y H son los menores con la misma razón, son primos entre sí. Pero EZ es par, así H es impar. En realidad, si fuera par, 2 mediría a EZ y a H, puesto que todo número par tiene una mitad; esto es imposible para números primos entre sí y así H no es par. Por lo tanto es impar.

Dado que EZ es dos veces ET, el cuadrado en EZ será cuatro veces aquel en ET. Pero el cuadrado en EZ es dos veces aquel en H, así que el cuadrado en H es doble del cuadrado en ET. Luego el cuadrado en H es par. Por lo antes dicho, H es par. Pero también es impar, lo cual es imposible. Así, AC y AB no son conmensurables en longitud. (Esta demostración sólo es posible si se dispone de los conceptos de número par e impar y números primos[16] entre sí, definiciones que Euclides provee en el libro séptimo.). De esta manera queda demostrada la proposición X.117.

La otra posible manera como se dio lugar a la existencia de las magnitudes inconmensurables en la escuela pitagórica fue mediante la inconmensurabilidad entre la diagonal del pentágono regular y su lado, el cual usaban los pitagóricos como emblema de dicha escuela. Veamos esta

---

[15] Definición. VII.7: Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad. (Los *Elementos* de Euclides. Disponible en: http://www.euclides.org/menu/elementsesp/indiceeuclides.htm)

[16] Definición. VII.13: Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común. (Los *Elementos* de Euclides. Recuperado el 9 de septiembre de 2011 de http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm)

demostración que lleva al descubrimiento de un número muy importante, no solo en las matemáticas, sino en otros campos de la vida. Se trata del número de oro o proporción divina.

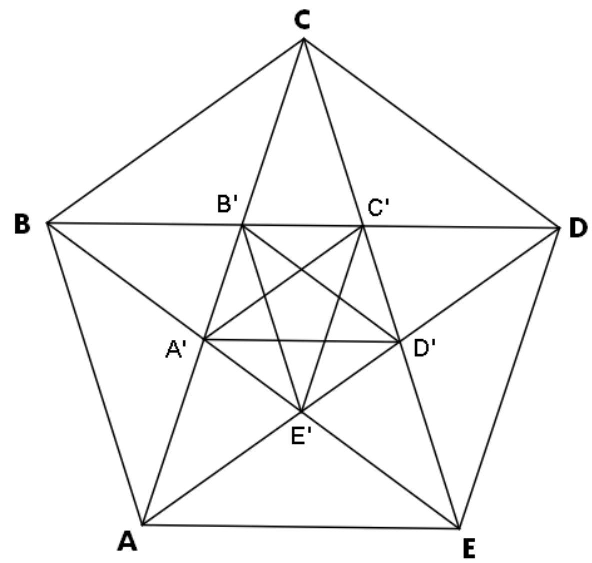
Sabemos que los pitagóricos usaban el pentagrama, es decir, el pentágono regular con los lados prolongados hasta el punto de intersección, como símbolo de reconocimiento.

En *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum* (Annals of Mathematics, 1945, 46, p 257) leemos:

> Hippasus de Metapontum debió intentar encontrar números y razones incorporados en el pentagrama y el pentágono regular [...] únicas figuras geométricas en las que la inconmensurabilidad puede ser fácilmente probada. Había un antiguo método, conocido por los artesanos como regla empírica muchos siglos antes del comienzo de la filosofía y de la ciencia en Grecia, a saber, el método de la sustracción recíproca, por el cual se halla la mayor medida común. Naturalmente no es posible descubrir la inconmensurabilidad en la forma como lo practicaban los artesanos, pero sí trazando todas las diagonales dentro del pentágono, que forman otro pentágono regular en el centro, con el que se puede practicar la misma operación, y así hasta el infinito, y por tanto reiterar de forma indefinida el proceso de sustracción recíproca, de modo que no puede haber una medida común de la diagonal y el lado del pentágono. Así pues, es aparente casi a primera vista que la relación entre la diagonal y el lado no puede ser expresada en números enteros, por grandes que sean.
>
> En el curso de la sustracción recíproca podemos ver que la diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono más grande es igual a la diagonal del pentágono más pequeño, y la diferencia entre el lado del pentágono más grande y la diagonal del pentágono más pequeño es igual al lado del pentágono más pequeño, y a su vez la diferencia entre la diagonal del pentágono más pequeño y su lado es igual a la diagonal del siguiente pentágono más pequeño, y así sucesivamente hasta el infinito. Ya que cada nuevo pentágono regular se obtiene trazando diagonales, es evidente que el proceso de sustracción recíproca se puede seguir realizando indefinidamente, y por tanto no se puede encontrar ninguna medida común de la diagonal y el lado del pentágono regular." (Fritz, 1945. Citado por González, 2003, p 86)

Observemos una demostración de la inconmensurabilidad entre el lado del pentágono regular y su diagonal.

Tomemos el pentágono regular $ABCDE$, como en la figura:



Si tratamos de medir la diagonal AD con el lado BC tenemos:
Dado que $ABCD'$ es un paralelogramo $BC = AD'$ *;* por tanto, BC cabe una vez en AD, sobrando DD'*.*
Debemos comparar ahora el sobrante DD' con el lado $BC = AD'$*.*
Puesto que $AE' = DD'$, entonces, DD' cabe una vez en AD' y sobra $E'D'$*.*

Siguiendo el proceso de medición, debemos determinar las veces que $E'D'$ cabe en AE', lo cual es lo mismo que determinar las veces que $E'D'$ cabe en $A'C'$, ya que $A'C'E'A$ es un paralelogramo; en otras palabras, medir la diagonal $A'C'$ del pentágono regular $A'B'C'D'E'$ con su lado $E'D'$, de tal suerte que llegamos al punto inicial de determinar la medida de una diagonal de un pentágono regular por su diagonal y el proceso sigue indefinidamente. (Recalde, L. (2006). *Lecturas de Historia de las Matemáticas*. UNIVALLE, Departamento de Matemáticas. Segunda Lectura: Número y Magnitud en los *Elementos*. p 5.)

Observamos que la inconmensurabilidad da paso a un proceso infinito e imposible de corroboración, contrario al proceso finito implicado en la conmensurabilidad. De esta manera se da paso a la irracionalidad (álogos) o la “no razón” y como hemos visto en el desarrollo de esta parte, el problema ha sido tratado desde la relación *número – magnitud,* siendo este un caso que sólo pudo resolverse hasta que se realizó la construcción de los reales por parte de Cantor y Dedekind hacia finales del siglo XIX. Le llamamos ‘problema’ porque la matemática desde la antigua Grecia se ha cimentado en la demostración y por tanto se hacía necesario fundamentar toda una estructura de estos ‘nuevos’ números.

Podemos mencionar otro contexto de la posible aparición de la inconmensurabilidad, el cual se puede considerar tan relevante como los que acabamos de mencionar sobre la diagonal del cuadrado e inconmensurabilidad con el lado del mismo, y el de la diagonal del pentágono regular y su inconmensurabilidad con el lado de este. Se trata del contexto musical de la época pitagórica. Los pitagóricos establecieron una escala musical mediante las razones de sus números, utilizando una especie de guitarra con una sola cuerda, llamada *monocordio*. Observaron que las cuerdas que daban el tono, la cuarta, la quinta y la octava, tenían longitudes proporcionales a $\mathbf{12}$, $\mathbf{9}$, $\mathbf{8}$ y $\mathbf{6}$, o lo que es lo mismo tenían longitudes proporcionales a 1, $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$, $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ y $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Tomando una frecuencia base para una cuerda de 1, cuando se tiene una cuerda de longitud $\mathbf{2}$, se obtiene un sonido una octava más alta que la nota original. Si su longitud es $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ la primera, la cuerda emite la cuarta de la nota base, y si su longitud es $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ de la inicial, la nota que suena es la quinta de la nota base. Todo funciona bien con números enteros hasta que hay necesidad de dividir la octava en dos, pues lleva al problema de encontrar un número cuyo cuadrado sea dos. (Recalde, 2006, pp 34, 35)

A los contextos y demostraciones que acabamos de nombrar sobre el surgimiento de los irracionales se pueden añadir muchos más ejemplos donde hallamos el fenómeno de la inconmensurabilidad y los procesos relacionados con el infinito.

La necesidad de medir magnitudes ha dado origen a los números racionales e irracionales y es aquí donde encontramos una diferencia: los racionales no son suficientes para medir. Recordemos que medir consiste en asignar a cada magnitud una cantidad numérica y como ya se vio, en este caso, existen magnitudes lineales a las que no se les puede asignar una cantidad racional.

Con el conocimiento de la teoría de números en la antigüedad griega obtenemos información esencial que nos permite continuar con el objetivo de diferenciar el conjunto de los racionales del conjunto de los números reales.

1.3. Aportes modernos a la construcción de los números reales

A continuación pasaremos a la época donde se pone fin al problema histórico de la separación entre número y magnitud, cuyo origen tuvo como escenario la antigüedad griega, alrededor del siglo VI a.EC, con los acontecimientos descritos hasta ahora en este capítulo. Este problema es resuelto con las construcciones de los reales de George Cantor y Richard Dedekind a inicios del siglo XIX de nuestra era.

En particular, trataremos la construcción de los números reales a través de cortaduras por Dedekind, la cual suple la necesidad de una estructura numérica que permitiera asignar un número toda magnitud geométrica, contribuyendo con su trabajo al momento crucial donde se constituye en objeto numérico el conjunto de los números reales.

Los aportes en teoría de conjuntos de Cantor son fundamentales en el propósito de caracterizar el conjunto de los números reales. Por tanto, utilizaremos algunos de sus resultados para mostrar diferencias entre los números racionales y los números reales.

1.3.1. La no-numerabilidad de los reales

“Hilbert describe el trabajo de Cantor como: *... el mejor producto de un genio matemático y uno de los supremos logros de la actividad intelectual netamente humana”* (Reyes, 2011; p 1)

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, Rusia, y murió el 6 de enero de 1918 en Halle, Alemania. Sus padres se mudaron cuando él tenía once años de edad a Alemania donde vivió hasta su muerte.

En 1873 Cantor probó que los números racionales son numerables, es decir, que se pueden contar puesto que se pueden colocar en correspondencia biunívoca con los números naturales. El problema radicaba en la prueba de la no numerabilidad de los números reales, se dice que esta prueba la realizó a finales de 1873 y sus resultados los publicó el año siguiente. (Reyes, 2011; p 1)

1.3.1.1 Conjuntos numerables

La *cardinalidad* de un conjunto corresponde a su número de elementos.
Dos conjuntos se dicen *equipotentes* o que tienen la misma cardinalidad si se puede establecer entre ellos una aplicación biyectiva.

A los conjuntos cuya cardinalidad es un número natural se les conoce como conjuntos finitos.

Dos conjuntos finitos son *equipotentes* si tienen la misma cardinalidad, es decir, el mismo número de elementos.

Un conjunto es *finito* si no es equipotente con ninguno de sus subconjuntos propios.

Si un conjunto A se puede poner en correspondencia con algún subconjunto propio de A, entonces A no es un conjunto finito, en tal caso se dice que A es un conjunto infinito. Un ejemplo es el conjunto de los números naturales, este puede ponerse en biyección con un subconjunto propio, por ejemplo, el subconjunto de los números pares. Si denotamos por $P \subset N$ el conjunto de los números pares, la aplicación

$$f : N \to P \text{, con } f(n) = 2n$$

es biyectiva y, consecuentemente, N y P son equipotentes. Los conjuntos finitos y los equipotentes con N se llaman numerables o contables***.***

George Cantor demostró que existen diferencias en la cardinalidad entre conjuntos infinitos, es decir, existen infinitos 'más grandes' que otros. Así, a los conjuntos infinitos numerables les asoció la cardinalidad $\aleph_0$ "aleph cero"[17], siendo esta la cardinalidad de los números naturales. Si un conjunto A es equipotente con N se dice que su cardinalidad es $\aleph_0$ y se denota $|A| = \aleph_0$.

Un ejemplo es el conjunto de los números enteros Z. Podemos ver que este es numerable si le asignamos a los enteros positivos los números naturales pares y a los enteros negativos los impares mediante una aplicación biyectiva así,

$$f : Z \to N,\ con \quad f(n) = \begin{cases} 2n \ si \quad n \geq 0 \\ -2n-1 \quad si \quad n < 0 \end{cases}$$

[17] La letra "aleph" es la primera letra del alfabeto hebreo.

Cantor demostró que el conjunto de los números racionales Q también es numerable[18].

Veamos la sencilla pero ingeniosa disposición ideada por Cantor para numerar las fracciones.

$$
\begin{array}{lllllll}
\frac{1}{1} \rightarrow & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \rightarrow & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \rightarrow & \frac{1}{6} \rightarrow & \frac{1}{7} \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \cdots & & \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \cdots & & \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} \cdots & & \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} \cdots & & \\
\frac{6}{1} \cdots & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Esta disposición muestra que las fracciones positivas se pueden poner en biyección con los enteros positivos, es decir, cada fracción se puede contar pues se hace corresponder con cada número natural, esto sin importar las fracciones equivalentes que se escriben. Lo mismo se puede realizar para las fracciones negativas. Así que Q y Z tienen la misma cardinalidad o son equipotentes. De esta manera se muestra que la cardinalidad de Q es $\aleph_0$. Por tanto Q es numerable, o en otras palabras, *los racionales se pueden contar.*

La pregunta ahora es, ¿todos los conjuntos infinitos se pueden contar?, es decir, ¿todo conjunto infinito tiene cardinalidad $\aleph_0$?

[18] Al parecer, esta demostración se realizó antes en un seminario de Weierstrass en Berlín hacia 1868.

Cantor demostró que no es así al probar que el conjunto de los números reales ***R,*** no es numerable.

1.3.1.2 Los reales no se pueden contar

De acuerdo los comentarios anteriores, tenemos que:

- El conjunto N de los números naturales es infinito y su cardinal se denota por $\aleph_0$ (aleph cero).
- ***A*** es un conjunto infinito numerable si es equipotente con N, es decir, si $|A| = \aleph_0$. Los conjuntos Z y Q son infinitos numerables, es decir, se pueden contar.

A continuación veremos que el conjunto ***R*** de los números reales es infinito, pero ***R*** es infinito no numerable.

Se dice que ***R*** y todos los conjuntos equipotentes con ***R*** tienen la potencia del continuo. Si se asume la hipótesis del continuo el cardinal de ***R*** se denota por $\aleph_1$ (aleph uno), pero, puesto que no es posible determinar el orden de infinitud de ***R***, este denota usando una C gótica

El hecho de que la cardinalidad de ***R*** no es la misma que la de los números racionales fue demostrado por Cantor, creador de la Teoría de Conjuntos Moderna y de la Teoría de los Cardinales.

Para probar que la cardinalidad de ***R*** es diferente de la de los números racionales, es suficiente demostrar que el intervalo $(0,1)$ no es numerable, puesto que, demostrar que un subconjunto propio no es numerable implica que el conjunto tampoco lo es.

Demostración de la no numerabilidad de *R*

La expresión decimal de todos los números en el intervalo $(0,1)$ tiene como parte entera cero. Para esta demostración suponemos que estas expresiones decimales en el intervalo $(0,1)$ se pueden numerar, es decir, que se pueden poner en biyección con el conjunto de los números naturales. Denotemos X_1 la primera de estas expresiones, X_2 la segunda y así sucesivamente. De este modo se establece una aplicación biyectiva $N \to (0,1)$, es decir, $n \to X_n$

$$
\begin{array}{c}
X_1 = 0,x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\ldots \\
X_2 = 0,x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\ldots \\
X_3 = 0,x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\ldots \\
X_4 = 0,x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}\ldots \\
. \\
. \\
. \\
X_n = 0,x_{n1}x_{n2}x_{n3}x_{n4}\ldots \\
. \\
.
\end{array}
$$

Ahora construimos el número $Y_n = 0,y_1y_2y_3y_4\ldots$, donde

$y_n = x_{nn} + 1$ si $x_{nn} < 9$ y $y_n = 0$ *si* $x_{nn} = 9$

Así hemos hallado un número decimal en el intervalo $(0,1)$ que es distinto de cualquiera en la lista anterior puesto que la n-ésima cifra decimal de $Y_n(y_n)$ es diferente de la n-ésima cifra decimal de $X_n(x_{nn})$.

Por ejemplo, si

$$X_1 = 0,12345665754\ldots$$

$$X_2 = 0,28765456544\ldots$$

$$X_3 = 0,31923344554\ldots$$

$$X_4 = 0{,}598877665 65\ldots$$

$$.$$

$$X_n = 0{,}789809905 64\ldots 76123\ldots$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

entonces

$$Y_1 = 0{,}2909\ldots 2\ldots$$

Lo anterior implica que la lista de arriba, los X_n, no contiene todos los números del intervalo $(0,1)$. De esta manera queda reducido al absurdo el supuesto de que $(0,1)$ es numerable. Por lo tanto ***R*** no es numerable.

Es claro que la teoría de los números irracionales de Cantor contribuye fuertemente en la caracterización de los números reales. Al comparar la cardinalidad de los números reales con la cardinalidad del conjunto de los números racionales vemos una diferencia importante, podría decirse que los números reales son muchos más individuos numéricos que los racionales. Veamos otros aportes realizados por la misma época; se trata de trabajos relacionados con la fundamentación numérica que son considerados por algunos autores más relevantes que los de Cantor.

1.3.2. Continuidad y números irracionales en Dedekind.[19]

Contemporáneo de Cantor y considerado como el *Euclides moderno,* por sus trabajos relacionados con el surgimiento de la matemática conjuntista y estructural de siglo XX, es el matemático alemán Richard Dedekind. Su aporte a la fundamentación y validación de los números debe referirse en este texto pues, aunque su trabajo principal como investigador fue en el terreno del álgebra y sobre todo en la teoría de números algebraicos, nos interesa su definición o creación[20] de los números reales por ser una huella importante en los elementos de la matemática.

Julius Wilhelm Richard Dedekind nace en Braunschweig, Alemania el 6 de Octubre de 1831 y muere el 12 de Febrero de 1916. En 1858 define los números reales mediante cortaduras que llevan su nombre, con esta definición Dedekind realiza un aporte de crucial importancia a un capítulo interesante de la historia de las matemáticas, en el cual participaron filósofos y matemáticos en un período de más de dos mil años. Dedekind mostró que los números reales tienen existencia fuera de la geometría; advirtió que la propiedad de la densidad de los números racionales hacía posible utilizar el fenómeno de las cortaduras para definir los reales.

Dedekind se apoya en la intuición geométrica pues la considera "extremadamente útil en el plano didáctico, e incluso indispensable a quien no quiera perder demasiado tiempo" (Dedekind, 1872, p 1).

Para Dedekind, el uso de la intuición geométrica le permite iniciar su acercamiento a la noción de continuidad. Podría decirse que, a modo de

[19] Dedekind publica su teoría de los números reales en la obra "Continuidad y números irracionales" (primera edición 1872), después de varias revisiones de su teoría.

[20] La distinción entre *definición* y *creación* en Dedekind, es un asunto estudiado por distintos historiadores y filósofos de las matemáticas. En particular, Arboleda (2009) afirma que para varios especialistas en el tema, se considera de manera natural que, desde los primeros trabajos de Dedekind, *definir* es *crear* y *crear* es *definir*. Es decir que existe una especie de circularidad y por tanto no hay una prioridad evidente entre los dos conceptos.

justificación de la importancia de la intuición geométrica, Dedekind afirma lo siguiente:

> Se dice muy frecuentemente que el cálculo infinitesimal se ocupa de magnitudes continuas, y sin embargo no se proporciona nunca una explicación de esta continuidad, e incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no fundamentan sus demostraciones sobre la continuidad, sino que o bien apelan, más o menos conscientemente, a representaciones geométricas, o a representaciones permitidas [sugeridas] por la geometría,… (Dedekind, 1872, p 1).

Como vemos, el uso de la intuición es importante para Dedekind[21]. Por tanto consideramos pertinente centrar la atención en su construcción de los números reales debido al valor didáctico que ofrece su presentación para acercar al lector a la noción de continuidad y su posterior conceptualización aritmética.

El capítulo 4 de su obra "Continuidad y Números Irracionales", lo titula *Creación de los números irracionales,* pues Dedekind desea hacer notar que se trata de una n[22] de cantidades, puesto que estas cantidades no existen hasta que son definidas por las cortaduras. Aquí generaliza la noción de cortadura como una partición de $\boldsymbol{Q}$ en dos subconjuntos disjuntos A_1 y A_2, tal que cada número de A_1 es menor que todo número de A_2, Si A_1 contiene a su máximo, o A_2 a su mínimo, la cortadura define un número racional. Pero si ni A_1 contiene a su máximo ni A_2 su mínimo, entonces se debe crear un número definido por dicha cortadura, con lo cual pasa a probar que existen infinitas cortaduras que no son generadas por números

[21] Es importante recordar que la construcción de los reales de Dedekind es totalmente aritmética, la intuición geométrica sólo es usada como un apoyo didáctico.

[22] Así como las limitaciones que se encuentran en operaciones aritméticas como sustracción en ***N*** y la división en ***Z***, constituyen la causa para el libre acto de creación de la mente humana de los números negativos y fraccionarios, en este mismo sentido, Dedekind crea libremente las cantidades que deben "ocupar" el lugar de las cortaduras ((Dedekind, 1872, p 3)

racionales y que esos números que generan dichas infinitas cortaduras deben ser *creados*.

El conjunto de los números reales es, por tanto, el conjunto definido por todas las cortaduras sobre $\boldsymbol{Q}$, y Dedekind demostró rigurosamente que dicho conjunto, es decir, los reales, es continuo. Dicho de otro modo, una cortadura asocia a cada real $\boldsymbol{r}$ dos conjuntos de racionales: aquellos que son menores que $\boldsymbol{r}$ y los que son mayores que $\boldsymbol{r}$, entonces, cada real origina dos conjuntos de racionales, el primero acotado superiormente por $\boldsymbol{r}$ y el segundo acotado inferiormente por el mismo $\boldsymbol{r}$.

Basándose en el axioma de continuidad[23], concluyó que todo conjunto acotado superiormente tiene un extremo superior y que todo conjunto acotado inferiormente tiene un extremo inferior. El extremo superior coincide con el extremo inferior o sea, con el real $\boldsymbol{r}$. De aquí se sigue la definición general de número real como: *el límite de sucesiones racionales que aproximan al real r por defecto y por exceso.* De este modo, podía demostrar con rigor que toda sucesión estrictamente creciente y acotada de reales tiene por límite un número real.

Ejemplo de una cortadura:

$\boldsymbol{A}_1 = \{\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{Q} / \boldsymbol{a}_1{}^2 < 5\} \cup \boldsymbol{Q}^-$ y $\boldsymbol{A}_2 = \{\boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{Q}^+ / \boldsymbol{a}_2{}^2 > 5\}$

Esta cortadura define un número así:

Como $\boldsymbol{a}_1{}^2 < 5 \Leftrightarrow |\boldsymbol{a}_1| < \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5} < \boldsymbol{a}_1 < \sqrt{5}$ y este conjunto unido con los números racionales negativos resulta en todos los números racionales menores que $\sqrt{5}$, es decir, $\boldsymbol{A}_1$. Y como

[23] Todo conjunto ***S*** de números reales no vacio y acotado superiormente tiene supremo

$$a_2 \in Q^+ \wedge {a_2}^2 > 5 \Leftrightarrow a_2 > 0 \wedge |a_2| > \sqrt{5} \Leftrightarrow a_2 > 0 \wedge (a_2 > \sqrt{5} \vee a_2 < -\sqrt{5}) \Leftrightarrow a_2 > \sqrt{5}$$

por tanto, A_2 es el conjunto de todos los números racionales mayores que $\sqrt{5}$. Podemos concluir que esta cortadura define un número que no está en A_1 como máximo ni en A_2 como mínimo, es decir, $\sqrt{5}$.

La propiedad de cortadura, que para Dedekind es trivial, permite expresar el fenómeno de la continuidad geométrica desde lo aritmético, lo cual es su punto de partida para la construcción del conjunto de los números reales.

Al desarrollar la propiedad de cortadura, donde establece que cada cortadura debe ser generada por un único número, pero que existen infinitas cortaduras que no son generadas por un número racional, Dedekind establece la incompletitud o discontinuidad del dominio de los racionales, pues estos números que deben generar cada cortadura (o ser generados por ella), deben ser creados para que, al ser comparados con la continuidad de la recta, puedan completar los espacios dejados por la incompletitud del conjunto de los racionales construyendo así, los números reales, que a diferencia de los números racionales son, como afirma Dedekind, tan *continuos* como la línea recta, tal como leemos en las siguientes citas tomadas de su obra *Continuidad y Números Irracionales*:

> Si ahora se quiere, y eso es lo que se desea, deducir aritméticamente de este modo todos los fenómenos en la recta, entonces los números racionales no bastan para ello, y sería por ello inevitablemente necesario rellenar de manera esencial el instrumento *R*[24] construido por la creación de los números racionales, creando nuevos números tales que el dominio de los números se convierta en tan completo o, como inmediatamente diremos, tan *continuo* como la línea recta. (Dedekind, 1872, p 5).

> Ahora, cada vez que se da una cortadura (*A*1;*A*2) que no está determinada por ningún número racional *creamos* un nuevo número,

[24] En la obra citada de Dedekind utiliza la letra *R* para referirse al conjunto de los números racionales.

> un número *irracional* α, que consideramos como perfectamente definido por esta cortadura (*A*1*;A*2); diremos que el número α corresponde a esta cortadura, o que él determina esta cortadura. Por lo tanto, de ahora en adelante, a cada cortadura determinada le corresponde uno y sólo un número determinado, racional o irracional, y consideramos a dos números como *diferentes* o *desiguales* si y sólo si corresponden a dos cortaduras esencialmente diferentes. (Dedekind, 1872, p 8).

Antes de definir la propiedad de cortadura, Dedekind enuncia la propiedad de densidad de los racionales. Pero, ¿qué significa que los racionales sean densos?

El libro "Continuidad y Números Irracionales" de Dedekind, en el capítulo 1, *Propiedades de los números racionales,* enuncia tres leyes (propiedades) del cuerpo ordenado ***Q*** de los números racionales:

> I. Orden: Si *a* > *b*, y *b* > *c*, entonces *a* > *c*. siempre que *a* y *c* sean dos números diferentes, y que *b* sea mayor que uno y menor que el otro, lo expresaremos brevemente así: *b* está situado entre los dos números *a* y *c*.
>
> II. Densidad: Si $\boldsymbol{a \neq b}$ existen infinitos de números racionales entre *a* y *b,* esta es la propiedad topológica de la densidad de los números racionales.
>
> III. Cortaduras: Para todo $\boldsymbol{a \in Q}$ existe una partición ($\boldsymbol{A_1, A_2}$)de $\boldsymbol{Q}$, llamada cortadura, tal que para todo elemento $\boldsymbol{a_1}$ de $\boldsymbol{A_1}$ se cumple que $\boldsymbol{a_1 \leq a}$ y para cada elemento $\boldsymbol{a_2}$ de $\boldsymbol{A_2}$ se cumple que $\boldsymbol{a_2 \geq a}$, con $\boldsymbol{a \in A_1}$ o $\boldsymbol{a \in A_2}$ indistintamente, considerando así como no *esencialmente diferentes,* en palabras de Dedekind, las dos cortaduras que entonces resultan. (Dedekind, 1872, pp 3,4).

Dedekind caracteriza a ***Q*** con estas tres propiedades. Es importante destacar la propiedad de la densidad puesto que esta propiedad es utilizada en la escolaridad en presentaciones, tanto de los números racionales, como de los números reales. Además, como afirma Arbeláez, L & Recalde, L (2011): “en algunos momentos históricos se confundió [la propiedad de la densidad] con la propiedad de la continuidad”, señalando el caso de Bolzano

(1991) en el que “parece que Bolzano identifica lo continuo con lo denso considerando que esta propiedad es necesaria y suficiente para tener un agregado continuo”. Dicha confusión implicaría una errónea apropiación del continuo numérico.

Analicemos, por tanto, la propiedad de la densidad desde los planteamientos de Dedekind.

Usando palabras de Dedekind podemos decir que, en el hecho de que todas las cortaduras no sean engendradas por números racionales “consiste la incompletitud o discontinuidad del dominio de los números racionales” (Dedekind, 1872, p 8), estableciendo una diferencia esencial con los números reales, es decir, los números racionales no poseen la propiedad de la continuidad, los racionales son incompletos o discontinuos, pero poseen la propiedad de densidad: dados dos números racionales, siempre es posible encontrar otro racional entre ellos.

Esta propiedad de densidad se puede expresar y demostrar de la siguiente manera:

Para cualquier $x, y \in Q$, con $x < y$, existe $q \in Q$, tal que $x < q < y$.

Demostración:

Supongamos que $x < y$, con $x > 0$, entonces existe $n \in N$, tal que $\frac{1}{n} < y - x$ de donde $1 < n(y-x)$, es decir, $1 < ny - nx$. Luego, existe $m \in N$ tal que $m - 1 \leq nx < m$, entonces $m \leq nx + 1 < ny$, así que $nx \leq m < ny$. Por tanto, $x < \frac{m}{n} < y$

Dedekind prueba que la relación de orden de ***Q*** se extiende a ***R**,* que es continuo.

Se puede afirmar que con los trabajos de Dedekind culmina una etapa de la historia de las matemáticas de más de dos milenios; entonces, podríamos decir, en cuanto a la historia de las matemáticas, que existe una era antes de Dedekind y la era actual, y que el punto de quiebre es la demostración de que los números reales tienen existencia fuera de la geometría.

La llamada continuidad numérica o completez[25] es la propiedad fundamental de los reales que se muestra por medio de la construcción de Dedekind. Esta propiedad de los números reales permite diferenciarlos claramente de los racionales: los números racionales son densos pero no completos. Esta propiedad de completez de los reales, puede ser confundida (al igual que suele suceder con la densidad) con la *continuidad*, esto se debe a la correspondencia que hace Dedekind de los números reales con la recta, pero debe entenderse que la completez se aplica exclusivamente al dominio numérico, mientras que la continuidad es una propiedad de carácter geométrico.

Desde el punto de vista histórico, con la completez se resuelve el problema que tuvo vigencia por más dos milenios. La cuestión de asignar una magnitud numérica a cada magnitud lineal queda resuelta, en otras palabras, se requería medir lo continuo, por tanto, la construcción del continuo aritmético de los números reales suple, finalmente, esta necesidad.

Por otra parte, siendo posible establecer una correspondencia numérica con cada punto de la recta geométrica, y teniendo en cuenta que la continuidad

[25] Cantor utiliza el término *completez* en su obra para referirse a la propiedad numérica equivalente a la continuidad geométrica, esto se puede observar en la traducción de Cantor realizada en López (2008, p 67).

del espacio se establece por un axioma[26], podemos afirmar que la estructuración de los reales como continuo aritmético es lo que permite un verdadero sentido al continuo geométrico. Este aspecto geométrico de la representación de los reales tratado por Dedekind, brinda una especie de visualización de las características de los números, y mediante ello podemos realizar un análisis que nos muestre aspectos relevantes pertinentes al propósito de apropiarse de los números reales, mostrando desde otro enfoque, algunas de las diferencias ya mencionadas de este conjunto con el de los números racionales.

Podemos decir, por todo lo anterior, que el conocer la historia del desarrollo de las teorías que llevaron a la caracterización del conjunto de los números reales y todos los procesos implicados en dichos desarrollos, permitiría a los estudiantes una mejor comprensión de las características de dicho conjunto numérico y, como es el caso para este trabajo, el reconocer las diferencias entre el conjunto de los números racionales y los números reales mediante el examen de los procesos que llevaron al surgimiento de cada conjunto numérico, contribuiría a la comprensión de estos y seguramente contribuiría a superar muchos de los obstáculos que se presentan al momento de caracterizar los conjuntos numéricos.

En conclusión, podemos ver claras diferencias entre los racionales y los reales mediante el análisis de algunos aspectos relacionados con su surgimiento hasta su constitución como objeto matemático. En este estudio se muestra cómo los reales suplen la necesidad de medir magnitudes que no era posible con el conjunto de los racionales, lo cual, en principio, parece posible para los racionales por tratarse de un conjunto numérico denso, es decir, como siempre es posible hallar un racional entre dos racionales dados, se podría pensar que siempre es posible asignar una cantidad numérica

[26] Me alegraría que todos juzguen el principio anterior tan evidente y tan concordante con sus representaciones de una línea; pues ni yo ni nadie está en condiciones de proporcionar ninguna demostración de su corrección. La asunción de esta propiedad de la línea no es otra cosa que un axioma, en virtud del cual se reconocerá solamente para la línea la continuidad, por el cual pensamos la línea como continua. (Dedekind 1872, p 6).

racional a cualquier magnitud. Pero aunque esta propiedad de la densidad también caracteriza a los reales, quedó demostrado que estos no se pueden contar, mientras que sí es posible contar los elementos del conjunto de los números racionales. También es importante reconocer la propiedad de la completez del conjunto de los números reales como la propiedad que los caracteriza fundamentalmente y que finalmente permitió sustentar el continuo geométrico, es decir, se suple la necesidad de asignar a cada magnitud lineal una cantidad numérica.

En el siguiente capítulo analizaremos representaciones de los números reales y los números racionales, en especial, la representación en la recta, usada a menudo en los textos escolares para definir los números reales. Veremos cómo estas representaciones arrojan luz sobre las características de estos conjuntos numéricos, acercándonos desde este enfoque representacional a diferencias conceptuales de ambos dominios.

CAPÍTULO 2: DIFERENCIACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS RACIONALES Y LOS NÚMEROS REALES A PARTIR DE ALGUNAS REPRESENTACIONES.

En este capítulo abordaremos la caracterización de algunas representaciones tanto del conjunto de los números reales como de los racionales. Aunque este análisis se centrará en la representación lineal (correspondencia biunívoca con los puntos de la recta), se incluirán representaciones que hacen explícitas algunas características de ambos conjuntos. Por ejemplo, las numeraciones simbólicas, es decir, las representaciones de los números mediante cifras o símbolos, además de acercarnos a una visualización de diferencias conceptuales y de representaciones simbólicas entre los números reales y los números racionales, nos muestran una característica distintiva de los primeros, se trata de la ausencia de un sistema de representación único mediante el cual podamos representar cada número real.

La numeración de posición, la escritura fraccionaria y la escritura especial son las más utilizadas en el ámbito escolar y universitario, pero deseamos mostrar la representación por medio de fracciones continuas, las cuales permiten mostrar una representación de los números reales que no es posible mediante las primeras y que, adicional a esto, pueden arrojar más claridad en el objetivo de la apropiación del concepto de número real.

2.1. La recta numérica como herramienta hacia una diferenciación entre los reales y los racionales.

Tal como vimos, la antigüedad griega conoció los números naturales, pero carecían de una estructura numérica que satisficiera la necesidad de medir cualquier magnitud, es decir, existía la necesidad de asignarle a cada magnitud lineal una cantidad numérica, de aquí que los griegos nunca identificaron la recta geométrica con el continuo numérico. El estudio de la recta numérica es relativamente nuevo. La recta numérica es un fenómeno actualmente explicado por el ya estructurado conjunto de los números reales.

La representación de los reales en la recta numérica presenta algunas limitaciones, pues, como veremos, no es posible representar de manera exacta cada elemento de este conjunto numérico, en contraste con los racionales que ofrecen una representación exacta mediante métodos como el de la regla y el compás ideales.

2.1.1 Consideraciones sobre la naturaleza de la recta numérica.

El debate filosófico y matemático en torno a la noción de número, en especial a la noción de número real, pareció quedar zanjado a finales del siglo XIX, con las construcciones de los números reales debidas a Cantor y Dedekind. Estos anunciaron por separado, pero contemporáneamente, que la correspondencia de cada número real con los puntos de la recta era una asunción que no podía demostrarse y debía considerarse como un axioma con el cual podemos superar las antiguas dificultades causadas por la ausencia de una estructura numérica que permitiera asignar a cualquier longitud un número determinado.

A continuación examinaremos interpretaciones de algunos autores influyentes a cerca de la naturaleza de la recta numérica.

La interpretación clásica debida a Dedekind sobre de la representación de los reales en la recta numérica influye actualmente en su definición y en la enseñanza escolar de los números, pues se suele mencionar la recta como un soporte numérico en el que se incorporan progresivamente los conjuntos numéricos; primero los naturales, siguiendo con los enteros, luego los racionales, para finalmente ser completado, es decir, dejarlo sin 'huecos' al situar allí a los reales. El proceso anterior se realiza apoyándose en la medida de longitudes. A esta imagen visual se le denomina 'representación en la recta numérica' y es usada a menudo para definir y enseñar los números reales. Pero esta definición involucra algunos problemas matemáticos, epistemológicos y educativos.

Antes de tratar los problemas que circundan la representación de los reales en la recta numérica y mostrar cómo permite esta representación diferenciar un conjunto numérico del otro, observemos algunos aspectos relevantes en Cantor y Dedekind y las elaboraciones sobre el tema de otros autores modernos.

Cantor le da un carácter concreto a su presentación, totalmente abstracta de los números reales, al comparar este conjunto con la línea recta, fijando un origen, definiendo cada punto según su ubicación respecto a este origen (+ o -) y estableciendo un segmento unidad que permite medir las distancias a cada punto en la recta respecto a este punto origen, asignando un número racional o irracional a cada uno según sea la distancia conmensurable o no, respectivamente (López, 2008; p 23); colocando así en correspondencia cada punto sobre la recta con una magnitud numérica e introduciendo así su axioma de continuidad en el espacio para que esta correspondencia sea biunívoca:

> Mas para completar el vínculo expuesto [...] entre los dominios de las magnitudes numéricas [...] y la geometría de la recta, es necesario añadir un *axioma* cuyo enunciado es simplemente el siguiente: a cada magnitud numérica corresponde también, recíprocamente un punto determinado de la recta, cuya ordenada es igual a esta magnitud numérica [...] Yo llamo a este enunciado un *axioma* porque está en su naturaleza el no poder ser demostrado de modo general (Cantor, citado en Scaglia, 2000, p 141).

Por tanto, aceptando el axioma de Cantor, la recta se identifica con el conjunto ordenado de los números reales, permitiendo así, en principio, representarlos todos, uno por uno, mediante puntos. (Crossley, 1987; p 152)

Richard Dedekind, para llegar a su argumentación de la continuidad de la recta, inicialmente expone que a cada número racional le corresponde un punto sobre la recta pero que se puede demostrar que hay infinitas longitudes que son inconmensurables con la unidad de longitud establecida por lo cual esta correspondencia de individuos puntuales con individuos numéricos no es biunívoca. En el capítulo 3, *Continuidad de la recta,* de su obra “Continuidad y Números Irracionales” leemos:

> “La recta L es infinitamente más rica en individuos puntuales que el dominio de los números racionales en individuos numéricos” (Dedekind, 1872, p 5).

Se evidencia, entonces, que no es posible realizar una biyección entre el conjunto de los números racionales y los puntos de la recta geométrica.

Dedekind axiomatiza la continuidad de la recta, pues afirma que la continuidad del espacio es indemostrable, aunque no fundamenta la propiedad de la continuidad desde lo geométrico, esto lo hace al introducir la afirmación recíproca a su propiedad de *cortadura*, propiedad que expresa la esencia de la continuidad en los reales:

> Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, tal que esta corta la recta en dos partes". (Dedekind 1872, p 6).

Para Dedekind esta propiedad de la recta es algo evidente y afirma que debería estar de acuerdo con las representaciones de línea de sus lectores. Sin embargo, la consideración axiomática de la continuidad implícita en la construcción de Dedekind no ha sido compartida por toda la comunidad matemática. A continuación mostramos diferentes posiciones de algunos autores, para lo cual hemos tomado como un referente la tesis doctoral de

Scaglia (2000). Un ejemplo, es la posición de Paul du Bois-Reymond (1982)[27]:

> La concepción del espacio como estático e inalterable nunca puede generar la noción de una línea uniforme claramente definida, desde una serie de puntos sin embargo denso, porque después de todo, los puntos están desprovistos de tamaño, y por lo tanto no importa cuán densa pueda ser una serie de puntos, nunca puede convertirse en un intervalo, que siempre debe ser reconocido como la suma de intervalos entre puntos. (du Bois-Reymond, citado en Scaglia, 2000, p 25)

Los autores Robinson[28] y Veronese[29] exhiben otras interpretaciones de la recta numérica, las cuales, aunque son esencialmente distintas entre sí, coinciden en que a la recta se le deben adicionar elementos infinitesimales[30] (números o segmentos, respectivamente).

> Robinson realiza una axiomática diferente, más amplia a la expuesta por Cantor o Dedekind, pero compatible con esta, él trabaja con la estructura numérica de los *hiperreales,* constituida por el conjunto de los números reales unido a los números infinitésimos e infinitos. A diferencia de los números reales, en la estructura de Robinson el axioma de Arquímedes[31] no se cumple, pues el producto de un infinitésimo por cualquier real estándar o por otro infinitésimo es siempre menor que cualquier fracción ordinaria positiva. Para realizar la representación geométrica de estos números se utiliza la llamada *recta hiperreal*, la cual contiene, además de los números reales, los infinitésimos y los infinitos, estos llegan a ser ubicados en dicha recta utilizando instrumentos metafóricos; para los infinitésimos, un “microscopio infinitesimal”, y para los infinitos un “telescopio infinito”.

[27] Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831, 1889). Matemático alemán. Trabajó en la teoría de las funciones, cálculo variacional , y las series de Fourier .

[28] Abraham, Robinson (1918, 1974). Matemático de origen alemán que fundó el análisis no estándar. Realizó un importante trabajo en lógica matemática.

[29] Veronese, Giuseppe (1854, 1917). Realiza un planteamiento de geometría intuitiva con un enfoque tanto lógico como sicológico, el cual tuvo gran influencia en la escuela de geometría italiana por muchos años.

[30] Un infinitesimal es una cantidad infinitamente pequeña usada en el cálculo infinitesimal, se definen estrictamente como límites y se suelen considerar como números en la práctica.

[31] Originalmente fue planteado para segmentos. Dada una razón de dos magnitudes, siempre es posible multiplicar una de ellas de tal manera que la otra sea excedida.

> Dicha representación de estos números es debida a Keisler (1976)[32](Scaglia, 2000, p 142).

Refiriéndose a la controversia acerca de la interpretación de la recta Keisler (1976) afirma:

> El sistema de números reales es una creación puramente matemática que puede o no dar una imagen precisa de una línea recta en el espacio físico. El hecho es que, mientras que nuestros sentidos nos dan una muy buena idea de cómo son los segmentos de recta de tamaño medio, sabemos muy poco acerca de cómo son, en el espacio físico, segmentos de recta muy grandes o muy pequeños. Por otro lado, hasta dónde podemos contar, la recta real es bastante como una recta en el espacio físico para todos los propósitos prácticos, y es fácil trabajar con ella. La recta real es, por lo tanto un, “modelo matemático” útil de una recta en el espacio. (Keisler, 1976, p 1)

Antes de que se estableciera la estructura de los hiperreales, Veronese realizó un análisis geométrico sobre la estructura de la recta, enunciando lo que él llama un axioma del continuo así:

> Si en un segmento AB existe un segmento variable XX’ tal que AX es siempre creciente y más pequeño que AX’, que es siempre decreciente, y XX’ pasa a ser infinitamente pequeño (es decir, más pequeño que cualquier segmento dado), entonces XX’ contiene un punto Y distinto de X y X’. (Veronese, citado en Scaglia, 2000, p 143)

A partir de este axioma, Veronese construye segmentos infinitesimales que satisfacen las propiedades fundamentales de la línea recta, a excepción del axioma de Arquímedes.

Respecto de la interpretación de la recta, Veronese afirma:

> El postulado según el cual un punto corresponde a cada número racional no está verificado en la práctica y, si se idealiza el punto y el segmento de tal

---

[32] Keisler, Howard Jerome. Matemático estadounidense, actualmente profesor de la Universidad de Wisconsin-Madison . Su investigación ha incluido la teoría de modelos y análisis no-estándar .

> manera que este último siempre contenga puntos distintos de sus extremos, la correspondencia uno a uno entre los puntos de la línea recta y los números reales ordinarios no está ya justificada (Veronese, citado en Scaglia, 2000, p 144).

Para Dedekind la correspondencia de cada racional con un punto de la recta está totalmente justificada. Las leyes o propiedades que enuncia para los números racionales son plenamente correspondientes con las enunciadas para la recta (Dedekind, 1872, p 4, 5).

Aquí hemos mencionado modelos matemáticos que nos muestran interpretaciones diferentes de la interpretación generalmente realizada de la recta numérica.

Estos mismos autores reconocen que no están poniendo de manifiesto la verdadera naturaleza de la recta numérica, solo realizan axiomatizaciones que les permitan justificar sus resultados.

La representación en la recta numérica es un instrumento que ha permitido trabajar el concepto de número real mostrando una imagen general de estos objetos abstractos, acercando al estudiante a su estructura y caracterización, es decir, la recta ha permitido visualizar los números reales y observar su comportamiento de manera muy general. Al respecto, Gardiner (1982) menciona:

> La cuestión excepcional acerca de estas imágenes mentales es que dan una idea esencialmente precisa de la estructura y de la conducta de los números reales abstractos, y así permiten llegar a controlar el concepto general de un número real de un modo más o menos explícito. (Gardiner, 1982, p. 254).

Según Freudenthal[33] (1983; p 28), se considera la recta geométrica y la magnitud lineal como fenómenos determinados por el número real, pero al momento de ubicar longitudes en la recta no es posible realizar mediante medición directa la asignación de los irracionales, pues esta medición exigiría un procedimiento infinito en el que el surgimiento de estos números solo puede ser sustentado por una actividad mental de medición indirecta donde, a pesar de que se empleen imágenes físicas, los elementos son completamente abstractos, es decir, elementos que sólo se manipulan mentalmente y donde la asignación de un número irracional a un punto en la recta no se podría realizar físicamente de manera exacta,

Los diferentes autores mencionados anteriormente, que han realizado algún tipo de interpretación de la recta numérica, coinciden en que las estructuras para la recta desarrolladas por ellos no constituyen la 'última palabra' en lo que se refiere a la interpretación de la recta. Todas aquellas interpretaciones son basadas en axiomáticas, por lo cual se puede decir, que la verdad sobre la naturaleza de la recta no es algo establecido plenamente de manera unánime. Por esta razón, aunque la recta es un instrumento ampliamente utilizado en los textos escolares para introducir los conjuntos numéricos, no debe considerarse como el medio principal para el estudio profundo de las propiedades de los números, en particular, de los números reales.

En el uso de la recta numérica para el estudio de los números reales intervienen imágenes que pretenden mostrar, de manera visual, la biyección punto – número, apoyada tradicionalmente en la medida de longitudes, con el objeto de que los estudiantes puedan acercarse a la estructura y caracterización del conjunto de los números reales de manera general, pero donde la interpretación acerca de la naturaleza de la recta varía desde las

[33] Hans Freudenthal (1905-1990). Matemático holandés nacido en Alemania, sus principales trabajos se relacionan con teoría curricular y didáctica de las matemáticas.

diferentes concepciones de los autores, sin poder acceder a una forma única de interpretación.

Sin embargo, podemos concluir que, a pesar de que no hay unicidad en la interpretación de la naturaleza de la recta numérica, se distingue una característica específica que diferencia los racionales de los reales. Esta consiste en que los racionales no logran establecer una correspondencia biunívoca con los puntos de la recta, indicando así que no son completos. En contraposición, y basándonos en los desarrollos de Cantor y Dedekind, los reales permiten una biyección con los puntos de la recta, mostrando su completitud o propiedad de la completez.

El rol de la intuición en la interpretación de la recta numérica.

Para ahondar un poco más en el estudio de la naturaleza de la recta numérica y de acuerdo con el propósito de este trabajo, el cual es realizar un análisis sobre las diferencias estructurales entre el conjunto de los números reales y los números racionales, que contribuya a una caracterización por parte de los estudiantes, en particular, del conjunto de los reales, consideramos pertinente presentar algunos resultados relacionados con el rol de la intuición en la interpretación de la recta numérica los cuales aportan elementos de orden pedagógico y ofrecen otro tipo de herramienta que los docentes pueden emplear en la enseñanza del concepto.

Se puede afirmar que las intuiciones son el soporte inicial para los desarrollos posteriores de las estructuras axiomatizadas de la recta. Por tanto, es importante considerar el asunto de la intuición, puesto que, según Scaglia (2000), a pesar de que se utilicen argumentos formales en la caracterización de la recta real, se pone en juego la intuición, un fenómeno presente desde temprana edad escolar. Fischbein, para quien “la intuición es una concepción cristalizada donde la incompletitud o vaguedad de información se enmascara mediante mecanismos especiales para producir los sentimientos de inmediatez, coherencia y confianza", manifiesta que "el problema educativo no es eliminar las representaciones e interpretaciones intuitivas, sino desarrollar la capacidad del estudiante para analizar y poner bajo control sus concepciones intuitivas y construir nuevas intuiciones consistentes en los requerimientos científicos normales" (Fischbein, 1987, p 10). Un estudiante puede hacerse una imagen mental del objeto matemático que varía de la imagen en la mente de otro de su misma escolaridad (Solomon, citado de Scaglia, 2000; p 145). En consonancia con lo expresado por este autor, algunas investigaciones ponen de manifiesto que estas intuiciones sobre las representaciones pueden ser variadas, discrepantes e incluso contradictorias (Scaglia, 2000, p 139)

Solomon[34] (1991) realiza un análisis sicológico de la recta. Menciona que se trata de una dualidad mental, pues se puede tomar la recta como idea o como objeto físico. En el primer caso, por ejemplo, un segmento de recta puede constar de un conjunto de puntos o de un conjunto de infinitésimos y en el caso de la recta física, un segmento de esta constaría de puntos discretos finitos. Es decir, en lo discreto o lo continuo interviene el *punto de vista* que se adopte al momento de examinar la recta. Por tanto, según el autor, esta naturaleza dual de la recta es una evidencia de la naturaleza dual de la mente humana (Solomon, citado en Scaglia, 2000, p 145).

Otras investigaciones muestran que se pueden presentar diferentes concepciones de acuerdo con la noción que se tiene de punto y recta. Estos 'preconceptos' en ocasiones constituyen ideas que difieren de los conceptos utilizados en matemáticas. Mansfield (1985), menciona lo siguiente respecto a estudios realizados de interpretaciones de sujetos de diferentes edades sobre nociones de punto y recta:

[34] Profesor de secundaria en Virginia- Estados Unidos

> Las diferencias principales eran la identificación de tres formas diferentes de rectas, la idea de que la recta tiene anchura, la noción de que los puntos son entidades añadidas a las rectas, y la idea de que los puntos tienen una forma y un tamaño definido (Mansfield, citado en Scaglia, 2000, p 145).

Además, añade que se encontró que los sujetos, incluso en la universidad, no distinguen entre los objetos matemáticos (números reales y recta numérica) y las marcas o trazos utilizados en su representación:

> Si los estudiantes no distinguen entre conceptos geométricos abstractos y sus representaciones físicas, entonces sus conceptos incluirán propiedades y relaciones basadas sobre características de aquellas representaciones que no forman parte de los conceptos tal como son usados por los matemáticos (Mansfield, citado en Scaglia, 2000, p 146).

Robinet (1986) realiza una investigación en estudiantes de primeros semestres de universidad respecto a las ideas que tienen de número real, considerando la recta como punto de partida. Él realizó su análisis basándose en la siguiente pregunta: “Si se amplificara con el microscopio electrónico (o con un ordenador) la recta, ¿qué se obtendría como dibujo ‘último’?” (Robinet, citado en Scaglia, 2000, p 146). Las respuestas mostraron que algunos ni siquiera parecen tener una imagen mental de la recta, otros no realizan diferencia entre imagen mental e imagen perceptiva, es decir, realizan la misma interpretación del objeto concreto que se visualiza físicamente y el objeto matemático abstracto, similar a lo que sucede en los casos en los cuales se corrobora lo mencionado por Mansfield, pues trabajan con el trazo realizado por el lápiz, sin diferenciarlo del objeto matemático, el cual es el objeto real de estudio. Por tanto, el autor concluye que la recta no da ‘intuitivamente’ una buena representación de los números reales para todos los sujetos.

Otra investigación realizada por Romero, C. (1996)[35], muestra las marcadas diferencias entre las percepciones de los estudiantes, las cuales se ven reflejadas en la caracterización que realizan de los reales.

> "La recta se percibe, o bien como una especie de cinta, o como un conjunto de puntos que, con frecuencia, son discos o pequeñas esferas" (Romero C., citado en Scaglia, 2000, p 146).

En cuanto a estas percepciones de la recta, este autor ubica los sujetos en dos categorías, 'los continuistas' y 'los atomistas', respectivamente. Los primeros perciben la recta como un todo sin distinguir elementos en ella y el segundo grupo ve elementos en la recta que poseen cierta estructura y, además, algunos de ellos consideran la recta con estructura de orden discreto mientras que otros no lo hacen.

De todo lo anterior podemos decir que las interpretaciones dadas de la recta están basadas en axiomas, donde la intuición juega un rol importante como punto de partida hacia el establecimiento de dichos axiomas. De aquí que los autores de estas diferentes interpretaciones coinciden en que las estructuras desarrolladas por ellos no constituyen una verdad acerca de la interpretación de la recta numérica, y que la representación en la recta induce a interpretaciones muy variadas donde las características atribuidas por los sujetos a la recta numérica no corresponden, en general, con las características del conjunto de los números reales. Además, algunos estudiantes no logran diferenciar los números y la recta numérica de las marcas que se realizan en su representación, lo cual, como vimos, es un obstáculo para la caracterización del objeto, en este caso, los números reales. Por tanto, la recta numérica no proporciona una buena representación de los números reales para ser utilizada en la apropiación del concepto de dicho conjunto numérico.

---

35 Carles Romero Chesa, Departamento de Matemáticas. IES "Manuel Blancafort", La Garriga, Barcelona.

Sin embargo, a partir de los problemas que se presentan en el momento de tratar de realizar el emparejamiento de los números con los puntos de la recta, podemos utilizar esta representación para exponer otras diferencias entre los racionales y los reales, que tomadas junto con los análisis realizados en el capítulo anterior constituyen un conjunto de elementos que aportan significativamente a los propósitos trazados para este trabajo.

2.1.2. La biyección punto – número.

Una diferencia entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales es la insuficiencia de los primeros para ser asignados a toda magnitud lineal. Los números reales, como observamos en el capítulo anterior, satisfacen dicha necesidad. Por lo tanto, a cada magnitud lineal se le puede asignar una magnitud numérica y, recíprocamente, a cada magnitud numérica podemos asignarle una magnitud lineal. Pero lo que sucede al momento de realizar un emparejamiento de cada punto sobre la recta con cada número real es un asunto que debe considerarse, pues implica, no solo un problema al realizar el procedimiento de emparejar puntos y números reales, sino que también es un problema de tipo conceptual. Dichos problemas nos permitirán dar cuenta de diferencias entre los números reales y los racionales.

El realizar la correspondencia de puntos de la recta con números reales y, recíprocamente, números reales con puntos de la recta, es lo que se conoce como biyección. Esta actividad se apoya en la medida de longitudes y podemos decir que se inicia ubicando dos puntos en la recta que representen la unidad, es decir, se nombran dos puntos, digamos, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ asignándoles el $\mathbf{0}$ y el 1 respectivamente, entonces, a cada número real $\boldsymbol{r}$ le corresponde un punto $\boldsymbol{P}$ de la recta, tal que, el vector $\boldsymbol{AP}$ es igual al producto del real $\boldsymbol{r}$ y el vector determinado por el segmento unidad $\boldsymbol{AB}$**,** la medida del segmento AP, es decir, $|r|$, queda establecida de acuerdo a la unidad AB**.** A r se le denomina *abscisa* de P **.**

Para realizar esta biyección se debe partir del supuesto de que la recta se compone de puntos y también se debe suponer que la descripción de la linealidad geométrica se realiza mediante la estructura de espacio vectorial de dimensión 1 sobre el cuerpo ***R*** (Scaglia, 2000, p 147).

Partiendo de lo anterior nos disponemos a estudiar la biyección mencionada por ser la que se utiliza comúnmente en el ámbito escolar. Se trata del emparejamiento de puntos de la recta y números utilizando algún proceso de medición. Debemos considerar que la recta exhibe el orden continuo de los reales, pero, respecto a esto, podemos mencionar que no hay manera de establecer cuál es el real sucesor de otro, ni el que le precede, es decir, no podemos decir, por ejemplo, cuál es el real que sigue exactamente después del 1. Pero podemos establecer, mediante el orden total de los números reales, que si se sigue la orientación habitual de estos en la representación de la recta, y si las abscisas correspondientes a dos puntos, digamos P y Q, donde P está a la izquierda de Q son r y r' respectivamente, entonces $r < r'$**.**

El primer problema de la medida consiste en determinar el punto en la recta correspondiente a un número dado. Esta asignación requiere de algún proceso de medición, pero además debemos tener presente que los números racionales se pueden describir inequívocamente, es decir, se pueden *dar,* mediante alguna representación, sea esta decimal o como fracción, pero los números reales presentan dificultades para describirlos inequívocamente en su totalidad puesto que, como se demostró en el anterior capítulo, los reales son innumerables. Por tanto, independiente del método de medida, no se puede realizar exhaustivamente la tarea de asignar a cada número *dado* un punto en la recta.

El asunto requiere que, luego de ubicar en la recta el segmento unidad $\boldsymbol{AB}$, con sus respectivas abscisas $\mathbf{0}$ y 1, se debe determinar en la recta el punto correspondiente a cualquier número real. Físicamente se obtendrá siempre un resultado aproximado para la ubicación de cualquier punto, pues se debe realizar mediante instrumentos físicos de medición que dependen de varios factores en el momento de realizar el proceso correspondiente, como la precisión de dicho instrumento. Idealmente, se pueden utilizar instrumentos de esta índole como la regla, el compás y el intégrafo[36].

Para realizar la asignación de un número real dado a un punto en la recta mediante el uso de la regla y el compás ideales se pueden obtener resultados exactos mediante procedimientos geométricos, pero estos procedimientos se realizan sobre los números constructibles con dichos instrumentos. Algunos números algebraicos y los trascendentes no admiten una representación en la recta idealmente exacta. Por otro lado, y suponiendo que fuera inequívoca la representación de cualquier número real dado, es posible ubicar su correspondiente punto en la recta utilizando el intégrafo. La utilización de este requiere un buen conocimiento de la integral de Reimann y por consiguiente de número real, además de movimientos en el plano, de lo contrario no tendría sentido el uso de este instrumento. Asumiendo que la gráfica de una función continua está representada de manera exacta, es posible, con el intégrafo, ubicar cualquier segmento de longitud arbitraria en la recta, pero el uso de este instrumento sólo tiene sentido con un buen conocimiento previo de número real.

Por lo anterior, podemos concluir que sin tener claro el concepto de número real se presentan conflictos al querer realizar su representación en la recta.

Cuando se trata de asignar un número real a un punto dado es debido considerar dos situaciones. Una de ellas consiste en que, dado un punto en la recta del cual se conoce la relación de medida con la unidad previamente

[36] Instrumento ideal utilizado para medir curvas.

dada, es posible asignarle idealmente un número real de manera precisa, en este caso se trata de una medición indirecta. Pero cuando no se conoce la relación del punto dado con el segmento unidad, se debe realizar una medición directa y el resultado será aproximado y depende del instrumento de medida utilizado y las características físicas del gráfico. Este trabajo puede realizarse en un número corto de pasos si se llega a una coincidencia con el punto y un extremo de un intervalo dado, pero de lo contrario, se deben realizar repetidas subdivisiones en el intervalo para aproximar cuanto sea posible la estimación del real correspondiente.

El proceso anterior es similar al mostrado en la sección del capítulo anterior sobre la conmensurabilidad, donde se ejemplifica la idea pitagórica de que siempre es posible medir, mediante alguna unidad, cualquier magnitud lineal. De aquí que al tratar de pasar a un plano ideal este proceso de representación, se obtenga un modo de pensar similar al pitagórico, pues para los estudiantes es complicado ver, idealmente, un proceso de subdivisiones infinito, el cual requiere en un proceso ideal de medición y una representación en la recta de los irracionales. En cuanto a esto, en un estudio realizado por Romero, I (1995), en niños de 14 a 15 años, expresa lo siguiente sobre su observación:

> Cuando yo intento diferenciar entre el plano físico, en el que están llevando a cabo la conmensuración, y el plano ideal, en el que dicha conmensuración se prolongaría infinitamente, ya que no existiría una parte alícuota que permitiera dar un resultado en forma de fracción, de forma que se puedan integrar ambos modos de medida, los alumnos quedan fuera de este tipo de discurso. (Romero I, 1995, p 231).

Tenemos, entonces, que la biyección punto – número real no es exacta, sólo es idealmente exacta para números constructibles con regla y compás o cuando se realiza la asignación por medio de una medición indirecta conociendo la relación geométrica entre la unidad y el punto dado.

Por tanto, tenemos que el conjunto de los números racionales admiten una representación en la recta idealmente exacta, mientras que el conjunto de los números reales sólo admite una representación en la recta numérica idealmente exacta para los números constructibles[37]. Además, la representación en la recta, nos permite una evidencia clara de la incompletitud de los racionales y nos acerca a la necesidad de obtener un conjunto numérico completo.

2.2. Las fracciones continuas en la diferenciación entre Q y R.

Otro aspecto que contribuye con el desarrollo de este trabajo es una mirada a las denominadas "matemáticas olvidadas", término con el cual hacemos referencia a la Teoría de Fracciones Continuas. Esta teoría de las fracciones continuas inicia alrededor del siglo XVII, alcanzando su edad de oro en el siglo XVIII, lo cual fue marcado por tres matemáticos, Euler, Lambert y Lagrange. La principal contribución a la teoría de fracciones continuas se debe a Leonard Euler. Su primer texto aritmético sobre el tema se tituló "*De fractionibus continuis*" y fue publicado en 1737. Euler demostró que cada número racional puede ser desarrollado en una fracción continua finita, que un número irracional se desarrolla mediante una fracción continua infinita, y que una fracción continua periódica es solución de una ecuación cuadrática, el converso fue probado por Lagrange en 1768.

Utilizaremos el análisis de esta parte para un acercamiento a las diferencias entre los racionales y los reales desde una perspectiva diferente y fácil de ser entendida, pues no requiere de conceptos muy elevados en el desarrollo inicial de este tipo de representación. Se trata, además, de una herramienta

[37] Para ubicar los racionales se puede utilizar el Teorema de Tales, y para el caso de los reales constructibles utilizamos el Teorema de Pitágoras.

que permite llegar, tanto a los racionales, como a los reales, partiendo desde un proceso común, el cual, en su desarrollo muestra, de un modo que básicamente no se dificulta, diferencias entre ambos conjuntos numéricos, permitiendo así dar importantes pasos hacia la apropiación del concepto de número real. Podemos decir que las fracciones continuas permiten una representación de los números reales y racionales, de una forma elegante y precisa.

Las fracciones continuas lideran el desarrollo de algunos resultados de la matemática. Por ejemplo, fueron fundamentales en la demostración de la trascendencia de π en 1882 y aún son de gran interés en muchos campos de la matemática pura y aplicada y el análisis numérico. Son también usadas en computación y electrónica. Pero en especial, nos interesa su uso en teoría de números.

La historia de las fracciones continuas se encuentra entre uno de los conceptos matemáticos más antiguos. Se puede decir que inicia con el algoritmo de Euclides para el máximo común divisor entre dos números enteros, unos tres siglos antes de la era común. Este es uno de los algoritmos más utilizados en la enseñanza escolar, es atribuido al matemático griego Euclides y nos conduce directamente hacia las fracciones continuas:

Sean a y b dos enteros positivos, con $a < b$.
Hacemos

$$r_0 = a$$

$$r_1 = b$$

y luego calculamos la sucesión de enteros (r_k)

$$r_k = r_{k+1}q_k + r_{k+2} \qquad k = 0,1,2,\dots$$

con

$$0 \leq r_{k+1} < r_k \quad \text{y} \quad q_k \in N.$$

Puesto que (r_k) es una sucesión entera estrictamente decreciente, existe un n, tal que $r_{n+2} = 0$. Así que, $r_n = r_{n+1}q_n$, donde r_{n+1} es el máximo común divisor de a y b.

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{r_k}{r_{k+1}} = q_k + \frac{1}{r_{k+1}/r_{k+2}}$$

y en consecuencia

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Por supuesto, Euclides no presentó su algoritmo de esta manera, ni usó alguna vez fracciones continuas. En aquella época las matemáticas se fundamentaban en la geometría y los números ***a*** y ***b*** eran representados por segmentos. Euclides medía el segmento mayor con el menor, luego el menor con el residuo, luego el primer residuo con el nuevo residuo, y así sucesivamente. El último residuo diferente de cero es el máximo común divisor.

Las fracciones continuas fueron utilizadas por el hindú Aryabhata (476-550) para solucionar ecuaciones diofánticas[38]. Posteriormente, en el siglo *XVI*, se llevan a cabo aproximaciones de raíces cuadradas por medio de fracciones continuas infinitas en desarrollos realizados por los italianos Bombelli y Cataldi. Este descubrimiento significó un gran acercamiento a la representación de los reales cuadráticos, pero en ese entonces no se realizó

---

[38] Toda ecuación lineal de la forma $a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = c$ donde los a_i y c son enteros y los posibles valores de x^i, soluciones de la ecuación, son números enteros, se llama ecuación diofántica.

ningún estudio más profundo de sus propiedades. Un siglo más adelante se introduce en las matemáticas el término *fracción continua,* ampliándose su desarrollo con los trabajos de Pierre de Fermat (1601-1665), de William Brouncker (1620-1684) y de John Wallis (1616-1703), habiendo sido utilizadas también en la práctica en la solución de diferentes problemas, como por ejemplo, en los trabajos sobre determinación de engranajes en maquinas realizados por Christian Huygens (1629-1695). Es en el siglo *XVIII* que Euler publica su teoría de fracciones continuas, pero son Lambert y LaGrange, quienes, por la misma época, establecen definitivamente sus fundamentos teóricos.

Una fracción continua se define como una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}}$$

Donde a_i y b_i son números reales o complejos, $i = 0,1,\ldots,n$.

En el caso de que cada a_i sea un entero positivo y cada b_i sea igual a 1, la fracción continua se denomina simple. Si el número de términos es finito la fracción se denomina fracción continua simple finita, y se denomina infinita si lo es el número de términos.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Esta fracción se expresa abreviadamente como [$a_0; a_1, \ldots, a_n$].

Como ya mencionamos, Euler demostró que todo número real puede ser desarrollado como una fracción continua infinita y todo numero racional se puede expresar como una fracción continua finita. Veamos una demostración de esto.

Teorema. Cada número real α, corresponde a una única fracción continua infinita con valor igual a α. Si la fracción es finita, corresponde a un número racional.[39]

Demostración.

Denotemos por a_0 el mayor entero que no excede a α. Si α no es un entero, la relación

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \qquad (1)$$

Nos permite determinar el número r_1. De aquí, es claro que, $r_1 > 1$, puesto que

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1 \qquad (2)$$

[39] Recordamos al lector que estamos considerando fracciones continuas con elementos enteros, que $a_i > 0$ para $i \geq 1$, y que el último elemento de cada fracción continua finita debe ser diferente de la unidad.

En general, si r_n no es un entero, denotamos por a_n al mayor entero que no excede a r_n y que define al número r_{n+1} por la relación

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}} \qquad (3)$$

Este procedimiento se puede continuar siempre y cuando r_n no sea un entero; aquí es claro que $r_n > 1$ ($n \geq 1$).

La ecuación (1) nos muestra que

$$\alpha = [a_0; r_1]$$

Ahora, supongamos que, en general

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n] \qquad (4)$$

Como para una fracción continua finita se sigue que

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \qquad (0 \leq k \leq n)$$

entonces, junto con la ecuación (3), tenemos

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}]$$

así que, (4) es válida para todo n (asumimos, por supuesto, que $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ no son enteros).

Si el número α es racional, todos los r_n serán claramente racionales. Es fácil ver que, en este caso, este proceso se detendrá luego de un número finito de pasos. Si, por ejemplo, $r_n = a/b$, entonces

$$r_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b}$$

donde $c < b$, ya que $r_n - a_n < 1$. De la ecuación (3) entonces resulta

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

(el c dado no es igual a cero, es decir, si r_n no es un entero; si r_n es un entero, nuestra afirmación queda satisfecha). Así que, r_{n+1} tiene un denominador menor que el de r_n. De ello se desprende que si consideramos $r_1, r_2, \dots,$ debemos finalmente llegar a un entero $r_n = a_n$. Pero en este caso (4) afirma que el número α se representa por una fracción continua finita, de la cual el último elemento es $a_n = r_n > 1$.

Si α es irracional, entonces todos los r_n son irracionales y nuestro proceso es infinito. Haciendo

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

(donde la fracción $\frac{p_n}{q_n}$ es irreducible y $q_n > 0$)

tenemos, por (4)

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \qquad (n \geq 2)$$

Por otro lado, es obvio que

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}$$

así que

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}$$

y consecuentemente

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}$$

Por tanto,

$$\frac{p_n}{q_n} \to \alpha \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\,;$$

esto significa que la fracción continua infinita [$a_0;\, a_1,\, a_2,\, \ldots$] tiene como su valor el número dado α (Khinchin, 1964, p 27).

Así hemos mostrado que cualquier número α puede ser representado por una fracción continua; esta fracción es finita si α es racional e infinita si α es irracional.

Representamos a continuación algunos números racionales mostrando el proceso para llegar a la fracción continua

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{\frac{11}{5}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}$$

Es decir,

$$\frac{5}{11} = [2,5]$$

Para el racional 23/18,

$$\frac{23}{18}=1+\frac{5}{18}$$
$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{18}{5}}$$
$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{5}}$$
$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}$$
$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}$$
$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}$$
$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

Por tanto,

$$\frac{23}{18}=[1;3,1,1,2]$$

Veamos el caso de números reales.

Para el caso de $\sqrt{2}$, como $1<\sqrt{2}<2$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+(\sqrt{2}-1) \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}+1}{1}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{2}-1}{1}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}+1}{1}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{2}-1}{1}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}}
\end{aligned}$$

Si observamos, este proceso se repetirá indefinidamente. Por tanto,

$$\sqrt{2}=[1;2,2,2,\ldots]$$

$$\sqrt{2}=[1;\overline{2}]$$

la cual es una fracción continua periódica.

Este mismo proceso se puede realizar para el caso de cualquier real cuadrático.

El lector puede verificar que

$$\sqrt{3}=[1;\overline{1,2}]$$

$$\sqrt{5}=[2;\overline{4}]$$

$$\sqrt{8}=[2;\overline{1,4}]$$

En general, la teoría de fracciones continuas muestra que todo número real cuadrático se desarrolla como una fracción continua periódica.

Las fracciones continuas periódicas son de la forma

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_n, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_k}]$$

Una fracción continua de la forma

$$[\overline{b_1, b_2, \ldots, b_k}]$$

se denomina periódica pura.

Al respecto, fue el matemático francés Joseph Louis Lagrange quien probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura).

Utilizar este teorema de Lagrange para el desarrollo en fracciones continuas puede permitir que un estudiante sea introducido hacia el concepto de los reales cuadráticos, evitando describirlos como números decimales no periódicos infinitos. En su lugar, se podrá apreciar un proceso infinito periódico por medio del cual se puede dar una representación precisa de cada real muy diferente de su representación simbólica en forma de raíz cuadrada.

El caso de los reales cuadráticos es de particular interés, pues nos muestran otra diferencia con los números racionales, la cual podemos analizar desde las fracciones continuas.

Como sabemos, muchas de las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$, con ***a, b, c*** $\in$ ***Z***, sólo tienen como solución números reales, es decir, los reales o irracionales cuadráticos. Esto nos muestra una necesidad que sólo pudo ser satisfecha por el conjunto de los números reales[40]. Estos

[40] Aunque no toda ecuación cuadrática se puede solucionar con los números reales, sino que su solución sólo se halla en el conjunto de los números complejos, no es de nuestro interés realizar dicho análisis.

reales cuadráticos son conocidos como *números metálicos.* Es interesante mostrar cómo a partir de estas ecuaciones y la manera de darles solución mediante fracciones continuas, puede realizarse un acercamiento a los números reales, en especial a los cuadráticos.

Si planteamos la ecuación cuadrática $x^2+bx-1=0$ para distintos valores enteros negativos de ***b,*** y procedemos a hallarle solución mediante un proceso que involucre fracciones continuas, esto nos permitirá acercarnos a los reales cuadráticos de una manera que seguramente resultará más clara e interesante. Veamos el caso para ***b*** = -1.

$$x^2-x-1=0$$

dividiendo la ecuación por ***x,*** $(x\neq 0)$

$$x-1-\frac{1}{x}=0$$

despejando ***x***

$$x=1+\frac{1}{x}$$

de lo cual obtenemos

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}} \qquad \text{(recuerde que } x=1+\frac{1}{x}\text{)}$$

al continuar indefinidamente con este proceso obtenemos la fracción continua periódica pura $[\bar{1}]$ y como al resolver la ecuación $x^2-x-1=0$ utilizando fórmula cuadrática $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, podemos ver que la solución positiva es el número real $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, el cual es el primero de la familia de los números metálicos, conocido como el número de oro, representado por ϕ. Por tanto

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

es decir

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\bar{1}]$$

Para obtener números como los de plata, bronce o níquel, se le asigna a ***b*** los valores de -2, -3, -4, respectivamente.

Número de plata $1+\sqrt{2} = [\bar{2}]$

Número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2} = [\bar{3}]$

De esta manera se puede realizar una aproximación a un valor racional, hasta donde se desee, para cualquiera de estos números. Por ejemplo, para el número de oro, realicemos una aproximación hasta la tercera posición en sus cifras decimales utilizando el desarrollo en fracciones continuas.

Una aproximación decimal de ϕ es 1.618033…

Con la fracción continua tenemos

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}}}}}=$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}}}}}}=$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{8}{5}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{8}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{13}{8}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{13}}}}=$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{21}{13}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{13}{21}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{34}{21}}}=$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{21}{34}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{55}{34}}=1+\frac{34}{55}=$$

$$\frac{89}{55} = 1.6\overline{1}\overline{8}$$

la cual es una aproximación decimal hasta la tercera cifra decimal.

Las fracciones continuas desarrollan aproximaciones para conocer la irracionalidad de los números reales trascendentes.

Como podemos observar, se pueden obtener desarrollos de números, sea racionales o reales, mediante fracciones continuas y, en particular, es interesante el uso exclusivo de los números enteros positivos o naturales en estos desarrollos. Podríamos decir al respecto que, en cierta manera y desde las fracciones continuas, se pueden obtener todos los números a partir de la unidad, aceptando así la idea de número en la antigüedad griega.

En la teoría de fracciones continuas se puede hallar un amplio campo de estudio. Lo que se ha presentado en este apartado es una breve exposición que exhibe una manera de acercarse, desde una perspectiva poco utilizada, al concepto de número real y a la vez muestra desarrollos desde una estructura común, que permiten hallar diferencias entre el conjunto de los reales y el conjunto de los racionales.

En conclusión, podemos decir que, en cuanto a la representación en la recta numérica, la identificación punto-número para cualquier número real, es esencialmente aproximada. Para que esta representación sea idealmente exacta es necesario que el número dado sea constructible con regla y compás; o que el punto dado se relacione con los correspondientes a 0 y 1 mediante una relación explícita que es equivalente a la constructibilidad con regla y compás.

Las diferentes concepciones acerca de la estructura de la recta atribuida por la biyección punto-número implican que el uso de esta representación en la recta como apoyo básico en el estudio de los reales requiere una clarificación de los elementos conceptuales y procedimentales. Sin embargo, independiente de las clarificaciones que se realicen, se logra establecer que los números racionales se pueden representar de manera idealmente exacta mediante la biyección punto-número, mientras que para el conjunto de los reales no es posible representar cada elemento de manera exacta.

El hecho de que los autores que exponen las diferentes interpretaciones de la naturaleza de la recta numérica coincidan en que las estructuras desarrolladas por ellos no constituyen una verdad acerca de la interpretación de la recta numérica, y el que la representación en la recta induzca a interpretaciones muy variadas donde las características atribuidas por los sujetos a la recta numérica no corresponden, en general, con todas las características del conjunto de los números reales, deja claro que la recta numérica es una herramienta que, aunque se suele utilizar en la escolaridad como soporte en el deseo de acercarse a los reales, no proporciona en sí misma una caracterización completa del conjunto de los reales y puede generar conflictos si no se tiene una previa comprensión de algunas características esenciales de ***R***, es decir, la recta se puede utilizar como herramienta para mejorar la comprensión de algunas características de ***R*** con las que el estudiante ha estado previamente relacionado, pero no proporciona una buena representación de los números reales para ser utilizada como una herramienta principal en la apropiación del concepto de dicho conjunto numérico.

Por otra parte, la representación en fracciones continuas permite ver diferencias claras entre los racionales y los reales. Es fácil mostrar que un racional se obtiene a partir de una fracción continua finita sin que esto implique conflictos con la naturaleza de esta representación, igualmente, se puede mostrar que un número irracional se desarrolla mediante una fracción continua infinita. Esta representación de los números, en la que, a partir de fracciones con números enteros, se logra representar todos los números reales, la convierte en una potente herramienta que podría ser utilizada por los maestros con el propósito de dejar establecidas diferencias estructurales entre los racionales y los reales y principalmente, acercar a los estudiantes a la caracterización del conjunto de los números reales.

CAPÍTULO 3: DIFERENCIAS ENTRE *Q* Y *R* SEGÚN ALGUNOS TEXTOS ESCOLARES.

Para que un objeto matemático pueda incorporarse al currículo debe sufrir ciertas transformaciones y así poder ser enseñado en la escuela (el "saber sabio" se transforma en "saber para ser enseñado"). Este proceso de transformación se conoce como *transposición didáctica* y ha sido ampliamente estudiado por Chevallard (1985).

Es en los textos escolares donde podemos observar el resultado de transposiciones didácticas realizadas en algunos objetos matemáticos, y es nuestro interés dar una mirada a lo expuesto acerca de los números racionales y los reales consignado en textos utilizados comúnmente en nuestro entorno educativo.

La constitución histórica de los números reales en objeto matemático es el resultado de un proceso de más de dos mil años, en el cual los diversos obstáculos hallados han sido superados con los aportes realizados en el transcurso de la historia; y como se menciona al inicio de este documento, los procesos de justificación y validación que han llevado a constituir los números reales en objeto matemático, son generalmente excluidos de las prácticas educativas; se considera que estos procesos son irrelevantes en la formación escolar y profesional.

Al realizar un análisis sobre los contenidos presentados en textos escolares utilizados actualmente por la comunidad educativa en nuestra región (Santiago de Cali – Valle del Cauca), en particular lo relacionado con el paso de los números racionales a los reales; y al comparar estos contenidos con lo documentado al respecto en el desarrollo de este trabajo, podremos dar cuenta del tratamiento que se realiza en dichos textos para guiar al estudiante hacia la apropiación del concepto de número.

En la práctica docente hemos constatado que el educador, en la mayoría de los casos, realiza el paso de los racionales a los reales de manera trivial, impidiendo que el estudiante establezca diferencias conceptuales profundas entre ambos conjuntos numéricos.

A continuación mostraremos los aspectos tratados en dos libros de educación secundaria respecto a la presentación que realizan de los números racionales y los números reales.

3.1. Sobre los textos escolares

3.1.1 Selección

Hemos realizado la selección de los textos de acuerdo a su grado actual de utilización en nuestro medio y por su pertinencia en lo relacionado con el contenido que deseamos tratar respecto a la presentación de los números, especialmente de los racionales y los reales.

Es en el grado 8° de enseñanza básica secundaria donde se inician directamente los contenidos relacionados con los números reales. Un texto comúnmente utilizado en nuestras escuelas colombianas es ***Delta 8*** de la Editorial Norma S.A. Se trata de un texto publicado en el año 2009, cuyos contenidos están de acuerdo a los estándares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN)[41].

El otro texto escogido para este análisis es ***Álgebra, trigonometría y geometría analítica***, de la editorial **Pearson – Serie AWLI**[42]**.** Aunque es una

---

[41] Aprobado según ley número 24 de 1987, (Diario oficial, Año CXXIII Nº 37.852 Bogotá 21 de abril de 1987), por el cual se establecen normas para la adopción de textos escolares y se dictan otras disposiciones para su evaluación.

[42] Es la versión en español de la obra titulada *Algebra and Trigonometry* publicado en 1992; se trata de un texto que se ha utilizado en algunas instituciones privadas de educación secundaria para aplicarlo a los grados 8° a 10°.

publicación traducida al español por Carlos Torrres Alcazar de la Universidad Nacional Autónoma de México y adaptada y revisada para Puerto Rico por Ángela González de Nin de la Univesidad de Puerto Rico, Río Piedras, sus contenidos son adaptables a lo requerido por el Ministerio de Educación Nacional de nuestro país.

Texto	**Autor**	**Editorial y año**	**Unidades de estudio**
Texto 1: Delta 8	Vladimir Moreno Gutiérrez Soraya Padilla Chasing Carmen Samper de Caicedo	Norma S.A. 2009	1. *Sistemas de los números reales*: ▪ Números racionales ▪ Números irracionales ▪ Los números reales ▪ Relación de orden en los números reales ▪ Valor absoluto ▪ Adición y sustracción de números reales ▪ Potenciación ▪ Notación científica ▪ Radicación y logaritmación en los números reales
Texto 2: Algebra, Trigonometría y Geometría analítica.	Stanley A. Smith Randall I. Charles Mervin L. Keedy Mervin L. Bittinger John A. Dossey	Pearson – Serie AWLI. 1992	1. *Números reales, álgebra y solución de problemas*: 1-1 Números reales y operaciones 1-2 Multiplicación y división de números reales 1-3 Expresiones algebraicas y propiedades de los números 1-4 La propiedad distributiva 1-10 Axiomas de cuerpos, teoremas y demostraciones

Tabla 1: Descripción de los textos

3.2. Categorías de análisis

Basándonos en las diferencias expuestas entre los números racionales y los números reales en los capítulos 1 y 2 de este documento, realizamos un análisis del tratamiento respecto a la caracterización de ***Q*** y ***R*** expuesta en los textos 1 y 2.

Partimos de extraer características relacionadas con el concepto y luego pasamos a lo relacionado con las representaciones.

Para realizar el análisis de los textos escogidos, iniciamos describiendo la manera como se presentan los números racionales, los irracionales y los reales en ambos textos escolares, luego determinamos la presencia de la característica de la cardinalidad, la exhibición del continuo, y el uso de las representaciones.

Con relación al concepto según sus características

- **Presentación de los números racionales y de los números reales**: La introducción de número irracional hasta la llegada del siglo XIX se realizaba por medio del concepto de magnitud, el concepto de irracional estaba ligado a la inconmensurabilidad de magnitudes. Se presentan los racionales como aquellos números que pueden representarse por medio de una expresión decimal periódica y los irracionales como los que no tienen periodo en su expresión decimal. Pero, por ejemplo, con el trabajo desarrollado por Dedekind se llega a una definición de número irracional independiente del sistema de numeración y sustentada desde la aritmética. Dedekind define cortaduras y plantea que todo número racional determina una cortadura, pero que hay infinitas cortaduras que no son generadas por un número racional. Cada cortadura que no es generada por un número racional produce un nuevo número llamado irracional. A partir de su teoría caracteriza el conjunto de los números reales.

En vista de lo anterior se esperaría que en la actualidad, la presentación que se realice del conjunto de los números reales vaya más allá de sus aproximaciones a expresiones decimales y se considere a los números reales desde sus propias características.

- **Cardinalidad**: Los números reales son un conjunto no numerable. Esta demostración se realiza a partir de probar que un subconjunto de ***R***, como el intervalo (0,1), no es equipotente con el conjunto de los números naturales. La demostración de que los racionales poseen la misma cardinalidad de los números naturales se puede realizar de manera sencilla tal como se muestra en el capítulo 1 de este documento. La presencia en los textos de esta característica puede lograr que en la escolaridad se obtengan mejores resultados a la hora de exponer el conjunto de los números reales, pues es un medio útil para la comprensión de propiedades como la densidad y la completitud, así como de la noción de infinito.

- **Completitud**: la característica fundamental destacada por Dedekind consiste en la completitud de los números reales. Si se desean seguir aritméticamente todos los fenómenos de la recta, no son suficientes los números racionales, puesto que estos son densos pero no completos, por esta razón Dedekind plantea la creación de un nuevo conjunto que posea la característica equivalente a la continuidad de la recta. La propiedad de la cortadura expresa la esencia de la continuidad de los reales, este es otro elemento útil en la caracterización de los conjuntos numéricos, puesto que por ser la continuidad numérica o completez una característica propia del conjunto de los números reales, es clave para diferenciarlos de los números racionales.

Con relación a las representaciones

- **Representación en la recta numérica**: la representación en la recta numérica es comúnmente usada como soporte en la introducción de los conjuntos numéricos. Se trata de una representación utilizada con mucha frecuencia en los textos escolares para que el estudiante aborde e interactúe con el conocimiento de los números, para que logre una conexión de los objetos mentales con los objetos matemáticos, en este caso, con los conjuntos numéricos. Por tanto, es importante relacionar las características de la recta numérica como representación de los racionales y los reales.

  La atribución de la continuidad a la recta se basa en axiomas, pero la naturaleza de la recta numérica es objeto de discusión y dicha naturaleza varía de un autor a otro. La recta se identifica por medio de una biyección con el conjunto ordenado de los números reales, pero en el caso de los números racionales esta identificación no es biunívoca pues la recta es más rica en individuos punto que los racionales en individuos número.

  La exposición consistente de la recta numérica como soporte a la definición de número real abre paso a intuiciones sobre la estructura del continuo lineal y la correspondencia de esta característica con los conjuntos numéricos. También permite una mejor comprensión de la cardinalidad de los conjuntos infinitos y la correspondencia con los racionales y los reales.

- **Representaciones simbólicas**

Escritura decimal: todos los números reales admiten una escritura decimal que representa al número con exactitud, en el caso de los racionales, o una escritura decimal aproximada cuando se trata de los irracionales. Esta escritura decimal se clasifica de la siguiente manera:

Escritura decimal exacta: se trata de números cuya parte decimal consta de una cantidad finita de cifras.

Escritura decimal periódica pura: corresponde a números cuya parte decimal está constituida por una cantidad de cifras que se repiten de manera periódica, por ejemplo, 10,345345345….

Escritura decimal periódica mixta: se trata de números cuya parte decimal consta de cierta cantidad de cifras seguida de otras cifras que se repiten periódicamente, por ejemplo, 0,236565656565….

Escritura decimal no periódica: consiste en números cuya parte decimal consta de cifras infinitas no periódicas.

Estas escrituras son usadas en la escolaridad para realizar una distinción de los racionales y los irracionales, de tal forma que el alumno reconozca elementos numéricos al observar estas representaciones.

3.2.1 Cuadros descriptivos de lo observado en los dos textos según las categorías de análisis.

Cuadro 1. Con relación al concepto según sus características.

Texto Categoría de análisis	Texto 1	Texto 2
Presentación de los números racionales.	Se inicia la lección 1de los números racionales exponiendo una situación en la que se refieren a los números racionales como	Presenta los números racionales como parte del conjunto de los números reales.

	'números fraccionarios'. Menciona que es práctico representar los números racionales expresándolos como números decimales, los cuales se obtienen de la división entre el numerador y el denominador de una fracción. Partiendo de esto basa su análisis en una caracterización de las expresiones decimales. Define términos como decimal exacto, decimal periódico, periódico puro, periódico mixto, etcétera. No se presenta ninguna definición explicita de los números racionales. Se realiza un "comentario" en la página 11 refiriéndose al surgimiento de los racionales como una ampliación del concepto de número entero debido a la necesidad de medir otras 'cantidades' como longitud, área, volumen, peso, tiempo, etcétera.	Define el conjunto de los números racionales como aquellos que se pueden expresar como una razón $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Muestra algunos ejemplos de numeraciones simbólicas mencionando que son racionales porque se pueden escribir en forma de fracción. Esto se puede observar en la página 4 del texto.
Presentación de los números reales.	En la lección 2, a partir de un ejemplo que involucra la medición de la diagonal de un cuadrado, de donde resulta $\sqrt{2}$ del cual se dice que es no un número racional por no ser un entero ni un número decimal periódico, se presenta una definición de los irracionales como números decimales infinitos no periódicos representados como conjunto por la letra I. La lección 3 presenta lo números reales con una previa referencia al uso de diferentes tipos de números como medio de satisfacer necesidades como contar, medir, resolver ecuaciones y enigmas de la naturaleza, mostrando los conjuntos de los números naturales y los enteros mediante escritura de conjuntos por extensión y usando para los racionales y los irracionales una escritura de conjuntos por comprensión. Seguidamente	Presenta los números reales como compuestos por los números racionales y los números irracionales. Si un número no es racional, es decir, no se puede expresar como una razón de enteros, entonces se dice que es un número irracional. Si un número entero no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es un número irracional. Además, como criterio de comparación utiliza la representación decimal, si esta termina o se repite se trata de un número racional, de lo contrario es irracional.

	realiza una presentación gráfica de relaciones de contenencia y no contenencia entre estos conjuntos, para finalmente definir los números reales como '*todos los números decimales, es decir,* $R = Q \cup I$.	
Cardinalidad	No se hace referencia alguna a esta característica de los números racionales.	No se hace referencia alguna a esta característica de los números racionales.
Completitud (completez)	En la pagina 20 bajo el subtitulo 'Intervalos acotados (segmentos)', se hace referencia a que los números reales "sirven para representar numéricamente las coordenadas de todos los puntos de un segmento de recta".	El capítulo 1 de los números reales inicia en la sección 1-1 con la afirmación: "Para cada punto de la recta numérica hay exactamente un número real".

Cuadro 2. Con relación a las representaciones.

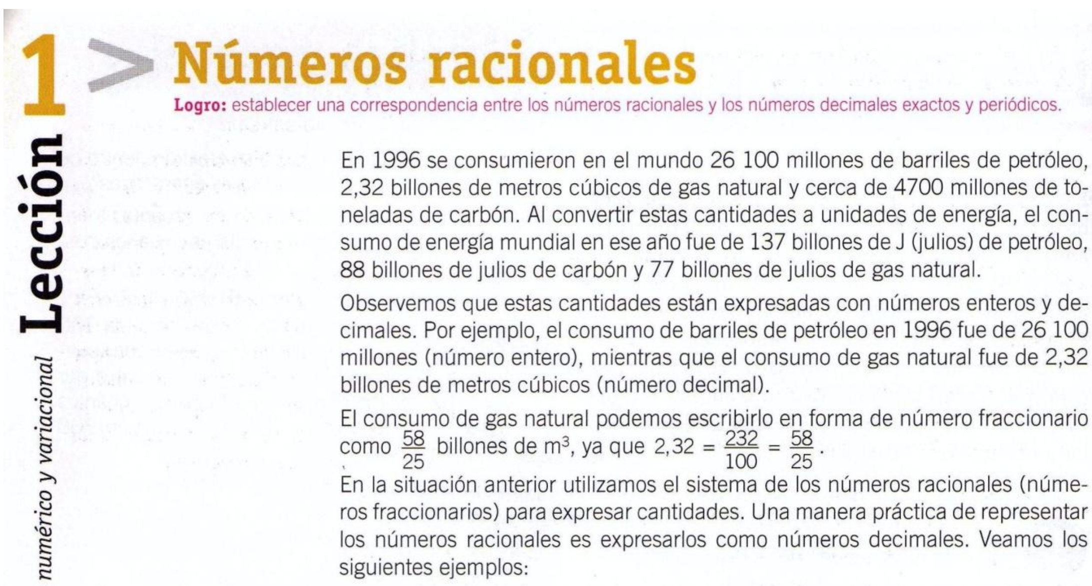
Texto Categoría de análisis	Texto 1	Texto 2
Representación en la recta numérica.	Luego de la definición de los números irracionales, el texto pasa directamente a representar algunos números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{9}.$ en la recta numérica. El proceso de ubicar estos números sobre la recta es expuesto en el texto y lo realiza mediante el uso del teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de algunos rectángulos y al trasladar la medida de estas diagonales a la recta con el uso del compás. Posteriormete muestra la representación geométrica de intervalos de números reales mediante el uso de segmentos de recta asignando a los extremos de cada segmento las coordenadas a y b, las cuales representan los números reales de los extremos del intervalo.	Luego de mencionar que para cada punto de la recta hay exactamente un número real, muestra una representación de una recta numérica donde ubica algunos números racionales y otros irracionales, indicando que a la derecha del cero se ubican los positivos, y los negativos a su izquierda.
Escritura decimal	Es la principal representación del texto para exponer los números racionales y definir los reales.	En los ejemplos de la página 5 utiliza la notación decimal para identificar, por medio de esta representación, la diferencia entre los números racionales y los números irracionales.
Escrituras especiales	Muestra algunas	Al igual que el texto 1, muestra

	representaciones especiales al presentar los números irracionales y al definir los reales. Algunas de estas representaciones son las raíces cuadradas de enteros positivos que no son cuadrados perfectos y π y e	las raíces cuadradas de enteros no cuadrados perfectos y π .
Fracciones continuas	No se recurre a esta representación.	No se recurre a esta representación.

A continuación se muestran imágenes de los textos donde se exhibe lo descrito en los cuadros 1 y 2.

Imágenes del texto 1

Presentación de los números racionales.



Lección 1 > Números racionales

s numérico y variacional

Logro: establecer una correspondencia entre los números racionales y los números decimales exactos y periódicos.

En 1996 se consumieron en el mundo 26 100 millones de barriles de petróleo, 2,32 billones de metros cúbicos de gas natural y cerca de 4700 millones de toneladas de carbón. Al convertir estas cantidades a unidades de energía, el consumo de energía mundial en ese año fue de 137 billones de J (julios) de petróleo, 88 billones de julios de carbón y 77 billones de julios de gas natural.

Observemos que estas cantidades están expresadas con números enteros y decimales. Por ejemplo, el consumo de barriles de petróleo en 1996 fue de 26 100 millones (número entero), mientras que el consumo de gas natural fue de 2,32 billones de metros cúbicos (número decimal).

El consumo de gas natural podemos escribirlo en forma de número fraccionario como $\frac{58}{25}$ billones de m³, ya que $2{,}32 = \frac{232}{100} = \frac{58}{25}$.

En la situación anterior utilizamos el sistema de los números racionales (números fraccionarios) para expresar cantidades. Una manera práctica de representar los números racionales es expresarlos como números decimales. Veamos los siguientes ejemplos:

Se expresan los racionales como números decimales y se caracterizan estas expresiones.

Si en un número decimal hay un número finito de dígitos en la parte decimal, el número se denomina ***decimal exacto****. Si hay un número infinito pero periódico de dígitos en la parte decimal, el número recibe el nombre de* ***decimal periódico****.*

Si en un número decimal el período comienza después de la coma, el número se denomina ***periódico puro****. Un número decimal cuyo período no comienza inmediatamente después de la coma se llama número* ***periódico mixto****.*

Un número racional cuyo numerador y denominador son primos relativos, es decir, que su m.c.d. es 1, recibe el nombre de ***fracción generatriz*** *del número decimal que le corresponde.*

Así como es posible encontrar la representación decimal de una fracción (dividiendo el numerador entre el denominador), podemos hallar (mediante un procedimiento) la fracción correspondiente a un número decimal, la cual dependerá del periodo de éste (puro o mixto).

Comentario sobre el surgimiento de los racionales en la página 11.

Comentario

Los números enteros son una abstracción del ser humano en su proceso de contar objetos, pero debido a la necesidad de tener que medir otras cantidades como longitudes, áreas, volúmenes, pesos, tiempo, temperatura, velocidades, etcétera, amplió su concepto de número entero al de número racional.

Presentación de los números irracionales.

Lección 2 > Números irracionales

Pensamiento numérico

Logro: identificar los números irracionales y diferenciarlos de los números racionales en diferentes contextos.

Un ingeniero tiene que trabajar sobre un terreno cuadrado de 150 m de lado, y desea determinar la longitud de la diagonal para construir un camino que disminuya el recorrido entre el depósito en el punto A y la zona de alimentos en el punto B, como muestra la figura 1.3. ¿Cuál es la longitud del camino?

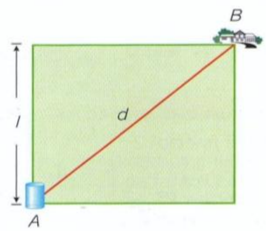


Figura 1.3

La situación, requiere calcular la medida de la diagonal. Para ello, usaremos el teorema de Pitágoras.

$d^2 = l^2 + l^2$ Teorema de Pitágoras.

$d^2 = 150^2 + 150^2$ Reemplazamos el valor de los lados.

$d^2 = 2\ (150^2)$ Sumamos términos.

$d = \sqrt{2}(150)$ Sacamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad.

Observamos que la medida de la diagonal es $\sqrt{2}$ veces la medida del lado del cuadrado, medida que no es un número racional pues no es un número entero ni un número decimal periódico.

El número $\sqrt{2}$ tiene representación decimal con infinitas cifras decimales y la obtendremos en la lección 3. Por ahora escribiremos una aproximación decimal con 13 cifras, obtenida con una calculadora: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623731$. El símbolo $\approx$ significa que hemos aproximado el número irracional $\sqrt{2}$ con el número racional 1,4142135623731. Por tanto, $\sqrt{2}(150) \approx 1{,}4142135623731 \times 150 = 212{,}1320344$ es la medida de la diagonal del cuadrado. El número $\sqrt{2}(150)$ es un ejemplo de número irracional.

Conexión con la vida

No siempre se tomó al número π como la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Arquímedes (287 – 212 a. C.)

Definición de los números irracionales.

*Los **números irracionales** son números que no se pueden expresar como cociente entre dos números enteros, es decir, no son decimales exactos ni decimales periódicos, son decimales infinitos no periódicos. Denotaremos con la letra **I** al conjunto de los números irracionales.*

Otro ejemplo de número irracional es π. La aproximación que generalmente se utiliza de él es 3,1416.

Si n es un número entero positivo que no es cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es un número irracional.

Presentación de los números reales

Pensamiento numérico

Lección 3

Los números reales

Logro: identificar el conjunto de los números reales como la unión de los conjuntos de racionales e irracionales.

El ser humano, a lo largo de su historia, ha manifestado necesidades como contar, medir, resolver ecuaciones y dar solución a diversos enigmas de la naturaleza. Estas necesidades han sido y serán satisfechas con el uso de los diferentes tipos de números.

Recordemos los conjuntos numéricos que hemos trabajado.

Números naturales o de conteo $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$.

Números enteros $\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Números racionales $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$ (decimales exactos (finitos) y periódicos).

Números irracionales $\mathbf{I} = \{x\!: x \text{ es un número decimal infinito no periódico}\}$.

Entre estos conjuntos se establecen relaciones de contenencia y no contenencia así:

Figura 1.8

Con base en estas relaciones podemos deducir:

1. Todo número natural es un número entero.
2. Todo número entero n es un número racional, porque $n = \frac{n}{1}$.
3. Ningún número racional es un número irracional y viceversa, porque las expresiones decimales son diferentes, unas son finitas o infinitas periódicas (números racionales) y otras son infinitas no periódicas (números irracionales).

Definición de los números reales.

La unión de los conjuntos decimales exactos, decimales periódicos y no periódicos forman el conjunto de los números decimales, al cual llamaremos conjunto de los números reales.

*Los **números reales** denotados con la letra **R**, son todos los números decimales, es decir,* $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

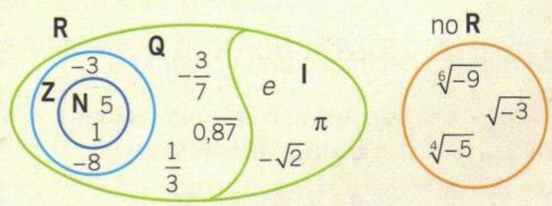


Figura 1.9

Lo relacionado implícitamente con la completitud en la página 20

G

> Intervalos acotados (segmentos)

Estos subconjuntos de números reales nos sirven para representar numéricamente las coordenadas de todos los puntos de un segmento de recta. Estos segmentos de recta pueden incluir sus extremos o no.

En la tabla 1.2 encontramos los posibles intervalos que representan al $\overline{PQ}$. Las coordenadas de sus extremos P y Q son a y b, respectivamente.

Representación geométrica	Notación intervalo	Definición por comprensión	Nombre del intervalo
a b	$[a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$	Intervalo cerrado
a b	(a, b)	$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$	Intervalo abierto
a b	$[a, b)$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$	Intervalo semiabierto a derecha
a b	$(a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$	Intervalo semiabierto a izquierda

Tabla 1.2

Representación en la recta numérica.

Se muestra la representación de los reales constructibles con regla y compás.

Ejemplo 5

15

Ubiquemos con exactitud, en una recta numérica, los siguientes números: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{9}$.

Solución

Utilizamos una escuadra y un compás.

Trazamos una recta y ubicamos números enteros, como muestra la figura 1.4.

Figura 1.4

Trazamos una recta perpendicular a la recta inicialmente trazada, que pase por el punto 1, y sobre ésta hacemos una marca a una unidad de distancia del punto 1. Unimos con una línea el punto O con el que acabamos de marcar en la recta vertical; así determinamos un triángulo rectángulo (*ver* figura 1.5). Con centro en el punto O y abertura del compás igual a la hipotenusa del triángulo formado, trazamos un arco que interseque a la recta en el lugar de los números enteros positivos (por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{2}$). El punto de intersección es la representación geométrica del número $\sqrt{2}$.

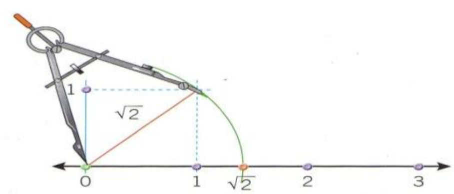


Figura 1.5

Para ubicar con exactitud el número $\sqrt{3}$, trazamos una recta perpendicular a la recta inicial, por el punto $\sqrt{2}$, y sobre ésta hacemos una marca a una unidad. Unimos con una línea el punto O con el que acabamos de marcar en la recta vertical. Con centro en el punto O y abertura del compás igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo formado (*ver* figura 1.6), trazamos un arco que interseque a la recta en el lugar de los números enteros positivos (por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{3}$; recordemos también que $(\sqrt{2})^2 = 2$). El punto de intersección es la representación geométrica del número $\sqrt{3}$.

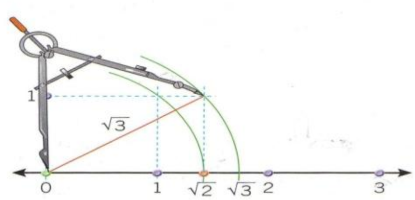


Figura 1.6

La ubicación de los otros números irracionales se representa en la figura 1.7.

Observemos que la ubicación de los puntos $\sqrt{4}$ y $\sqrt{9}$ son 2 y 3 respectivamente; esto se debe a que $4 = 2^2$ y $9 = 3^2$, es decir, son números cuadrados perfectos. ◄

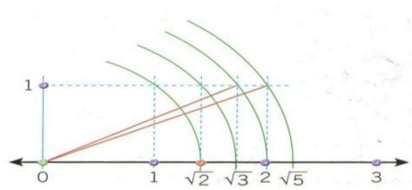


Figura 1.7

Imágenes del texto 2

Presentación y definición de los números racionales

Definición
Los **números racionales** son aquellos que se pueden expresar como una razón $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Los siguientes son números racionales:	$-\frac{2}{7}$	4	9.6	0	$0.\overline{6}$
Pues se pueden escribir como sigue:	$\frac{-2}{7}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{96}{10}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$

Presentación y definición de los números irracionales

Si un número real no se puede expresar como una razón de enteros $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, entonces se dice que es un número **irracional**. Por ejemplo, podemos demostrar que no hay un número racional que sea la raíz cuadrada de 2. Es decir, no podemos encontrar enteros a y b para los que $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$. Aunque nos podemos aproximar, no hay un número racional cuyo cuadrado sea *exactamente* 2. De este modo, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Es irracional. A menos que un número entero sea un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es irracional. Los siguientes números son irracionales.

$$\sqrt{3}, \qquad \sqrt{8}, \qquad -\sqrt{45}, \qquad \sqrt{11}, \qquad \pi$$

La representación decimal de un número racional o termina o se repite. La representación decimal de un número irracional nunca termina y nunca se repite.

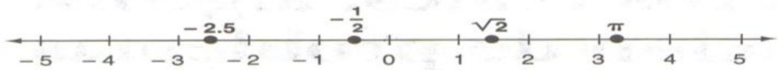
Capítulo 1 *Números reales, álgebra y solución de problemas*

Presentación de los números reales.

En esta introducción a los reales observamos la representación en la recta numérica donde se asume la biyección punto-número.

1-1 Números reales y operaciones

El conjunto de números más importante en el álgebra es el de los **números reales**. Para cada punto de la recta numérica hay exactamente un número real.



Los números positivos se ubican a la derecha del cero, y los negativos a su izquierda. Cero no es ni positivo ni negativo. El conjunto de **números naturales** $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, el de enteros no negativos o **cardinales** $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, y el de **números enteros** $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ son subconjuntos del conjunto de números reales.

Números racionales y números irracionales

Objetivo: mostrar que un número es racional y distinguir entre números racionales y números irracionales.

Los números reales se componen de los números **racionales** y los números **irracionales**.

EJEMPLOS De los siguientes números, determina cuáles son racionales y cuáles irracionales.

1. 8.974974974 . . . (un grupo de dígitos se repiten) Como los dígitos 974 se repiten, el número es racional. Lo podemos expresar como $8.\overline{974}$. La raya puesta encima indica que ese grupo de dígitos se repite una infinidad de veces.

2. 3.12112111211112 . . . (no hay un grupo de dígitos que se repiten). Como los dígitos no llegan a un fin ni hay un grupo de dígitos que se repiten, el número es irracional.

3. 4.325 Como los dígitos terminan, el número es racional.

4. $\sqrt{17}$ Como 17 no es un cuadrado perfecto, el número $\sqrt{17}$ es irracional.

Luego de definir las operaciones con números reales en la sección 1-2, continúan las secciones 1-3 y 1-4 con propiedades de los números, pero con este subtitulo el texto hace referencia a propiedades operativas de los números, no se relacionan las propiedades numéricas de la densidad o la continuidad. Más adelante, en la sección 1-10, se presentan algunos axiomas de los números reales como propiedades de los mismos con el objetivo de justificar los enunciados algebraicos.

3.2.1. Análisis y conclusiones de la información presentada en los cuadros 1 y 2.

En el texto 1 se encuentra, de manera implícita, una definición muy similar de los números racionales utilizada en el texto 2, pues al referirse a lo práctico del uso de las expresiones decimales como una manera de representarlo y mostrar cómo hallar la expresión decimal de una fracción, está expresando el número racional como el cociente entre dos enteros. Posteriormente presenta los irracionales como “números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, es decir, […] son decimales infinitos no periódicos”(Delta 8, p 14).

Para ambos textos, una diferencia en cuanto a la definición entre los números racionales y los números reales es su posibilidad de expresar los primeros como el cociente de dos números enteros, mientras que no es posible esta misma expresión en los números reales.

En la página 11 del texto 1 aparece un comentario sobre la insuficiencia de los números enteros para realizar ciertas mediciones, lo cual, como menciona el texto, da lugar ampliar el concepto de entero al de número racional. Este breve análisis epistemológico realizado en este comentario, se pone de manifiesto de nuevo en la lección 3 del texto 1 al introducir los números reales, pero no se da a conocer cuáles fueron esas necesidades que provocaron el surgimiento de los diferentes conjuntos de números.

El texto 1, en la lección 3, define los números reales diciendo que “son todos los números decimales”. Esto está en pugna con las características de los reales puesto que las expresiones decimales solo se usan como una aproximación para los números reales. El adjetivo decimal se emplea incorrectamente pues por un lado, la expresión número *decimal* se refiere a un conjunto numérico, como cuando se emplea la expresión número *entero* para referirse al conjunto de los números enteros, por tanto, al emplearse la expresión decimal significa que es un número que admite una escritura en forma de fracción decimal, es decir, un número racional. Por otro lado, la palabra decimal hace referencia a la base de numeración de diez, es decir, un número escrito en el sistema de numeración posicional decimal.

También se usa la notación de conjuntos para definir los reales como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Esta definición no aporta elementos que muestren las propiedades que realmente caracterizan el conjunto de los números reales; al usar la notación conjuntista para definir los reales podría asumirse que los irracionales son un conjunto incompleto igual al conjunto de los racionales o que su cardinalidad es la misma, en general, el uso de la notación de conjuntos no es suficiente en la conceptualización de ***R***. El texto 2 no realiza ningún tipo de notación conjuntista en este caso.

En los dos textos se asume de manera implícita el continuo numérico, es decir, la propiedad de la completez de los números reales, cuando describe una biyección de los puntos de un segmento con los números reales. A pesar de este hecho implícito, no se muestra de manera clara esta fundamental propiedad perteneciente al conjunto de los números reales, la cual suministra una fuerte herramienta para diferenciarlo del conjunto de los números racionales.

Se puede notar el hecho que ninguno de los dos textos se ponen de manifiesto las diferencias conceptuales entre los conjuntos numéricos. Las diferencias tratadas en estos textos no van más allá de sus expresiones decimales, lo cual no permite una clara caracterización del conjunto de los números reales.

La recta numérica se utiliza, como es común en los textos escolares, al introducir un nuevo conjunto numérico. El texto 1 utiliza la recta numérica al introducir los números irracionales mediante la ubicación de algunos números constructibles. Parten de la selección de la unidad entera y empleando la regla y el compás se le asigna a algunos números un punto sobre la recta. Este proceso se realiza partiendo del supuesto de que la recta se compone de puntos. La noción intuitiva del continuo lineal es fuente de dificultades y hasta contradicciones donde se ve implicada la noción de infinito. Dichas dificultades se manifiestan cuando los escolares, mediante la representación geométrica, no pueden dar cuenta de las diferencias entre la densidad y la completitud o continuo numérico.

Si la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, realizada mediante la medida de longitudes, se conceptualizara como una biyección, serviría de medio para mejorar la comprensión de esenciales características del conjunto de los números reales tales como, la densidad, el orden y la completitud. Por ejemplo, el sistema axiomático sobre el que se fundamenta el continuo lineal de la recta atribuye propiedades al conjunto numérico de los reales que resulta muy complicado de expresar mediante las representaciones numéricas, pero mediante el empleo apropiado de la representación en la recta numérica, esta característica del continuo podría ser comprendida más ampliamente cuando se trata de estudiar el conjunto de los números reales. Pero en ninguno de los textos analizados se pone de manifiesto la naturaleza de la recta como apoyo a la construcción del concepto de número real.

Por tanto, consideramos que es primordial trabajar de modo consistente en la representación de la recta, dando mayor atención al proceso de biyección profundizando en este de manera explícita en los textos escolares.

La cardinalidad no es tratada en ningún modo en los textos que fueron objeto de análisis. Sin embargo, consideramos que una presentación de la cardinalidad permitiría un gran aporte a la comprensión de propiedades de los conjuntos numéricos y a la noción de infinito. Al mostrar que los números racionales poseen la misma cardinalidad que el conjunto de los naturales, puesto que se puede realizar una correspondencia biunívoca entre los elemento de cada conjunto, mientras que el conjunto de los números reales consiste en un infinito no numerable, los escolares se apropiarían de una herramienta útil en la diferenciación de los racionales con los reales que, a la vez, les permitiría una mejor comprensión del infinito numérico implicado en la caracterización de ***Q*** y ***R***.

Se definen los números reales como ‘compuestos de los números racionales y los números irracionales’, para pasar a definir los racionales a partir de los números enteros e inmediatamente llegar a la definición de los números irracionales simplemente como los números reales que no se pueden expresar como una razón de enteros.

Las diferencias que se muestran sobre las representaciones son básicamente iguales en ambos textos. La escritura en expresión decimal se muestra como ejemplo de la manera más clara de diferenciar un racional de un real. El texto 1 realiza un tratamiento mucho más amplio que el texto 2 sobre las expresiones decimales y los términos alrededor de su representación.

En cuanto a la escritura especial, se utilizan las raíces cuadradas de enteros que no son cuadrados perfectos, pero no se aclara que cuando la operación de radicación se aplica a estos números enteros, la expresión completa puede ser tomada como una representación de un número real. Este tipo de representaciones al ser combinadas dan lugar a expresiones más complejas que igualmente son tomadas como representaciones de números reales, por ejemplo, $\sqrt{\sqrt{\mathbf{2}}}$, $\sqrt{\mathbf{5}}+\mathbf{3}$, $\ln \mathbf{3}$, $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{3}}$.

La representación por medio de fracciones continuas no se utiliza en ninguno de estos textos, ni siquiera es tema de estudio en alguna lección. El empleo de fracciones continuas para la presentación de ***R*** permitiría excluir el uso de expresiones decimales, que sólo son una aproximación de los reales mediante el uso de los racionales, o de los símbolos especiales, y expondría una manera diferente y precisa de representar cada número real, y en caso de que se requiera, se pueden usar fracciones continuas para proporcionar un valor aproximado de un número real a un racional, tan aproximado como se desee. Además, las fracciones continuas podrían aplicarse desde el primer grado de secundaria dado que se requiere sólo los números naturales y el algoritmo de Euclides para su desarrollo.

Las diferencias que se observan en los textos escolares analizados son esencialmente desde su escritura decimal, la cual lleva a mostrar los irracionales y los racionales como conjuntos disyuntos, no se mencionan de manera explícita ninguna de las características fundamentales que llevan a diferenciar los números racionales de los números reales y el tratamiento que se realiza acerca de sus representaciones es muy superficial.

Hemos observado que estos textos ejemplares del currículo de bachillerato mencionan una breve introducción a los números reales sin desarrollar el concepto, pero trabajando diferentes representaciones como la especial, posicional y la representación en la recta. Se da por sentado la biyección de los números con la recta puesto que no se exhibe ningún tratamiento de esta.

La manera como se exhiben las representaciones de los números reales en estos textos escolares permite ver que, tal como se analizó en el capítulo anterior, no se cuenta con una representación unificadora y adecuada para los números reales, añadiéndose así a las dificultades que se presentan en la escolaridad.

Al realizar el análisis de un texto publicado para el uso exclusivo de los estudiantes en nuestro país y de otro, que aunque se ha utilizado en nuestras aulas, es una publicación extranjera utilizada en diversos países, podemos decir, por tanto, que no existe de una perspectiva global para el tratamiento de los números reales ni para su representación; si se realizara un análisis similar con otros textos se encontrarían tratamientos, incluso esencialmente diferentes, tal como lo hemos constatado en nuestra experiencia docente en diferentes colegios.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado un análisis histórico epistemológico de algunas diferencias entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales con el propósito de proporcionar un material de estudio que contribuya a la tarea de enfrentar las problemáticas relacionadas con el estudio y apropiación de estos conjuntos numéricos, en particular, el conjunto de los números reales.

Hemos estudiado el contexto histórico del surgimiento y objetivación de los reales donde explicitamos algunas características que muestran diferencias fundamentales entre los racionales y lo reales.

Conocer los hechos relacionados con el descubrimiento de magnitudes inconmensurables en la antigua Grecia y la profunda influencia que tuvo este hecho en la historia del desarrollo de las matemáticas, permite comprender de manera más amplia la naturaleza de los objetos matemáticos, en este caso, los números reales. Comprender que los antiguos griegos descubrieron magnitudes lineales, es decir, segmentos, los cuales no se podían medir o poner en proporción con algún otro segmento, suministra una base para acercarse a la caracterización del conjunto de los números reales.

La tarea de fundamentar la estructura del conjunto de los números reales, desde una base puramente aritmética que desligara toda característica geométrica, tardó un extenso período de tiempo durante el cual se realizaron progresivos aportes significativos. La apropiación del concepto de número real debe incluir una revisión de los aportes realizados en el transcurso de la historia puesto que, no solo brinda una mejor comprensión de las características esenciales de los números reales, sino que estos desarrollos realizados son parte fundamental de las matemáticas.

El proceso de objetivación de los números reales llega a su etapa trascendental con los trabajos realizados por Cantor y Dedekind. Al estudiar estas teorías numéricas desarrolladas por estos autores visualizamos características que brindan claras diferenciaciones de los reales con los racionales. La cardinalidad y la completitud son dos propiedades esenciales que deben considerarse en cualquier estudio de los números reales. La potencia del continuo numérico, característica propia de los números reales, es clave en la diferenciación con los números racionales, pues esta permite una mejor comprensión de la continuidad numérica o completez, a menudo confundida con la densidad o con la continuidad geométrica propia de la recta. A pesar de este hecho, pudimos evidenciar cómo los textos escolares no proporcionan algún estudio de estas características numéricas.

En el estudio de la representación de los números reales en la recta hallamos que existen conflictos relacionados con el uso de esta herramienta representativa, puesto que la naturaleza de la misma varía de un autor a otro y su caracterización se fundamenta en intuiciones. Por tanto, la inclusión de la recta como apoyo básico en el estudio del conjunto de los números reales requiere que se clarifiquen los elementos conceptuales y procedimentales requeridos en esta representación. Por ejemplo, la biyección punto-número es un aspecto que se suele dar por sentado en los texto de estudio, tal como pudimos observar en nuestro análisis de textos escolares, pero la tarea de asignar un punto en la recta a cada número real, o de identificar cada punto en la recta con una cantidad numérica, aunque puede pensarse que es aparentemente sencilla, es una tarea que no puede realizarse exactamente desde un punto de vista ideal y tampoco permite un procedimiento finito para cada número real o para cada punto en la recta. La comprensión de este hecho acerca de la biyección proporciona una fuente representativa que muestra diferencias entre los números reales y los racionales. Con este estudio quedó claro que todos los números racionales se pueden representar de manera exacta en la recta numérica, pero que del conjunto de los reales solo se pueden ubicar de manera exacta los números constructibles.

Sin embargo, más allá de los conflictos que conlleva la representación en la recta, esta es una herramienta clave en la caracterización de los conjuntos numéricos. La continuidad geométrica atribuida axiomáticamente a la recta aporta desde esta característica elementos para la comprensión de la continuidad numérica.

Consideramos que las fracciones continuas son una potente herramienta, no sólo como representación de ***R***, sino que mediante su uso se pueden exhibir procesos característicos del conjunto de los números reales que no es posible mediante el empleo de otras representaciones simbólicas, por ejemplo, los reales cuadráticos generalmente son representados mediante el uso de la raíz cuadrada, la cual puede confundirse con la operación o la función en la que se usa este mismo símbolo. Además, con el empleo de fracciones continuas se pueden introducir los números reales desde etapas de la escolaridad más tempranas a las actualmente propuestas en los currículos, debido a que sus desarrollos básicos sólo requieren el empleo de los números naturales y el conocimiento del algoritmo de Euclides para la división.

A la luz del análisis realizado podemos concluir que los textos escolares no brindan la información necesaria que permita a los estudiantes esclarecer las diferencias esenciales entre los racionales y los reales.

Por último, podemos concluir que al mostrar algunas diferencias de los reales con los racionales permitirá a docentes en formación y en ejercicio plantear alternativas que aporten elementos para tratar con dificultades que afrontan los estudiantes cuando se desea que se apropien de las características del conjunto de los números reales.

Por ejemplo, tomar en cuenta la historia, las representaciones con sus ventajas, sus limitaciones y conflictos, así como la presentación de los racionales e irracionales que realizan algunos de los textos empleados en el ámbito escolar al momento de presentar los conjuntos numéricos, podría servir como herramienta para el objetivo de superar algunos de los obstáculos que surgen en el momento de pretender que los estudiantes se apropien tanto del conjunto de los número racionales como del conjunto de los números reales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Anacona, M & Ortiz, G (2009). La noción de vecindad en la apropiación de los números reales. EN: *La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes*. Universidad del Valle (en imprenta)

Anacona, M. (2004) El estructuralismo bourbakista en los textos de enseñanza universitaria. El caso de los números reales. EN: *Formación de cultura científica en Colombia. Ensayos sobre Matemáticas y Física*. Artes Gráficas, Universidad del Valle, Cali. Colombia.

Anacona, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. Revista EMA. Vol. 8, N°1, 1-17

Apostol, T. (1982). *Calculus*. Reverte. Segunda edición. Barcelona, España.

Arbeláez, G., Anacona, M. & Recalde, L (1998) *Número y magnitud: Una perspectiva histórica*. Universidad del Valle, Cali

Arboleda, L. (2009). Hilbert y el método de los ideales. *Mathesis.* Vol.III, No.4, 239-263

Brezinsky, C. (1991). *History of Continued Fractions and Padé Aproximants.* Board. Estados Unidos.

Bruno, A. & Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. Educación Matemática 18 (003), 125-149.

Cauchy, A. (1994). *Curso de análisis*. Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensé Sauvage. Paris.

Chinchilla, J. & Quesada, L. (1998). *Fracciones continuas, algoritmos y curiosidades.* 6^{to} CINEMAC, 1.

Crossley, J. (1987). *The emergence of number.* Singapur: World Scientific.

Dedekind R. (1872). Continuidad y Números Irracionales (5 ed). [versión electrónica] (J. Bares & J. Climent. Trad.).

Fischbein, E. (1987): *Intuition in Science and Mathematics*. An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983): *Didactic Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht Reidel Pub. Co.

Gardiner A. (1982), Infinite Processes. Background to Analysis. Nueva York, Springer-Verlag.

González, P. (2003), *La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática*. Disponible en: http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200304/memories/ elementseuclides1.pdf).

Jiménez D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 13 (1), 87

Keisler, H. (1976): *Elementary Calculus*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt

Khinchin, A. (1964). *Continued Fractions.* (3 ed). Phoenix Boks. Chicago U.S.A.

López, L. (2008). *Los números reales y la noción de completez en Cantor, Dedekind e Hilbert: Un Análisis Histórico - Epistemológico*. Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciada en Matemáticas. Univalle, Cali, Colombia.

Mansfield, H. (1985): *Points, lines, and their representations*. *For the Learning of Mathematics*, 5,3, 2-6.

Panza, M. (1999). *Nombres. Éléments de mathématique pour philosophes.* Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris.

Recalde, L. (2004). *La lógica de los números infinitos: Un acercamiento histórico*. Revista Matemáticas Enseñanza Universitaria. 12 (1), 51-72.

Recalde, L. (2006). *Lecturas de Historia de las Matemáticas*. Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas.

Recalde L. & Arbeláez G. (2011). *Los Números Reales como Objeto Matemático:* una perspectiva histórico-epistemológica. Universidad del Valle.

Reyes, F. (2011). Historia de las matemáticas, Biografía de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Recuperado el 26 de agosto de 2011 de http://www.astroseti.org/articulo/4247/ Incorporated**.**

Romero, I. (1995). Introducción del Número real en la Enseñanza Secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Scaglia, S. (2000). Dos conflictos al representar números reales en la recta. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Veronese, G. (1994): *On non-archimedean geometry*. En P. Ehrlich (ed.): *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.